11 класс Отборочная олимпиада 22 октября 2018

1. Найдите наибольшее натуральное n такое, для которого существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $x_i^2 - x_i x_j$ не делится на 111 при любых $i \neq j$.

2. Внутри треугольника ABC отметили точку K. Точки M и N отмечены таким образом, что K и M по разные стороны относительно прямой AB, а K и N — относительно прямой BC. Оказалось, что

$$\angle MBA = \angle MAB = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA.$$

Докажите, что $BMKN$ — параллелограмм.

3. В стране между некоторыми городами есть односторонние беспересадочные рейсы. Докажите, что можно выделить непустое множество городов A так, что между городами из A нет рейсов, а из любого города вне A можно не более чем с одной пересадкой долететь до некоторого города из A.

4. Существуют ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени выше первой, имеющие целые коэффициенты, для которых

$$P(Q(x)) = x^{2019} + 729x^{2018} - 343x^{256} + 2x + 77?$$

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть ω — описанная окружность треугольника AB_1C_1, а окружности ω_1 и ω_2 проходят через A_1 и касаются ω в точках B_1 и C_1 соответсвенно. Докажите, что вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 лежит на прямой BC.

6. По кругу расставлено 6000 шариков десяти цветов. Оказалось, что среди любых ста подряд идущих шариков найдутся шарики всех цветов. При каком наименьшем k можно найти k подряд идущих шариков, среди которых есть шарики всех цветов?

11 класс Отборочная олимпиада 22 октября 2018

1. Найдите наибольшее натуральное n такое, для которого существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $x_i^2 - x_i x_j$ не делится на 111 при любых $i \neq j$.

2. Внутри треугольника ABC отметили точку K. Точки M и N отмечены таким образом, что K и M по разные стороны относительно прямой AB, а K и N — относительно прямой BC. Оказалось, что

$$\angle MBA = \angle MAB = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC = \angle KCA.$$

Докажите, что $BMKN$ — параллелограмм.

3. В стране между некоторыми городами есть односторонние беспересадочные рейсы. Докажите, что можно выделить непустое множество городов A так, что между городами из A нет рейсов, а из любого города вне A можно не более чем с одной пересадкой долететь до некоторого города из A.

4. Существуют ли многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени выше первой, имеющие целые коэффициенты, для которых

$$P(Q(x)) = x^{2019} + 729x^{2018} - 343x^{256} + 2x + 77?$$

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть ω — описанная окружность треугольника AB_1C_1, а окружности ω_1 и ω_2 проходят через A_1 и касаются ω в точках B_1 и C_1 соответсвенно. Докажите, что вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 лежит на прямой BC.

6. По кругу расставлено 6000 шариков десяти цветов. Оказалось, что среди любых ста подряд идущих шариков найдутся шарики всех цветов. При каком наименьшем k можно найти k подряд идущих шариков, среди которых есть шарики всех цветов?