11–2	Системы линейных уравнений	18 октября 2018

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Все a_{ij}, b_k являются элементами некоторого поля $\mathbb{K}$ (далее мы будем считать, что это $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$). Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовем *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Рассмотрим следующие *элементарные преобразования*:

- поменять местами две строки;
- умножить строку на ненулевое число;
- прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

Упражнение. Осознайте, что если одну СЛУ можно получить из другой СЛУ при помощи последовательного применения элементарных преобразований, то они эквивалентны. Верно ли обратное утверждение?

1. Докажите, что при помощи элементарных операций любую СЛУ можно привести к *ступенчатому виду*, то есть виду

$$\left\{ \begin{array}{rcc} c_{1k}x_k + \dots\dots\dots + \quad c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{2l}x_l + \dots\dots + \quad c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \dots\dots\dots \qquad & & \\ c_{rs}x_s + \dots + \quad c_{rn}x_n & = & d_r \\ 0 & = & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & d_m \end{array} \right.$$

где $c_{1k}, c_{2l}, \dots, c_{rs} \neq 0$, $k < l < \dots < s$.

2. Докажите, что

- если $m < n$, то СЛУ имеет ноль или бесконечно много решений;
- если $m = n$, то СЛУ имеет ноль, одно или бесконечно много решений;
- если $m > n$, то СЛУ имеет ноль, одно или бесконечно много решений.

3. СЛУ называется *однородной*, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Пусть $m = n$, и у однородной системы есть только нулевое решение. Докажите, что любая система, получающаяся из данной заменой правой части, будет иметь единственное решение.

---

4. Докажите, что если в линейном пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис содержит n векторов.

5. Имеется клетчатая таблица $(k + 2) \times (l + 2)$, в её граничных клетках расставлены произвольные вещественные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

6. Есть 101 корова. Если убрать любую корову, то оставшихся можно поделить на две части, равные по весу и численности. Докажите, что коровы весят одинаково, если вес каждой коровы

a) рациональный;

b) вещественный.