11–2 Линал в комбинаторике 4 октября 2018

Напоминание. Если в линейном пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис содержит n векторов.

Определение. Линейное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в его базисе — *размерностью*. Если в линейном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным*.

Следствие. Любые $n+1$ векторов в линейном пространстве линейно зависимы.

1. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет. За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?

2. На кружке по математике n школьников решали $n+1$ задачу. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи *интересными*, а некоторые — *скучными*, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи суммарно столько же баллов сколько за скучные. (Некоторые задачи могут быть не интересными и не скучными.)

3. Изначально все клетки доски 8×8 белые. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак «+» или «–». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $n+m-1$ чисел.

6. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

11–2 Линал в комбинаторике 4 октября 2018

Напоминание. Если в линейном пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис содержит n векторов.

Определение. Линейное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в его базисе — *размерностью*. Если в линейном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным*.

Следствие. Любые $n+1$ векторов в линейном пространстве линейно зависимы.

1. Изначально все клетки доски 8×8 покрашены в белый цвет. За одну операцию разрешается целиком перекрашивать строку или столбец. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями?

2. На кружке по математике n школьников решали $n+1$ задачу. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что можно назвать некоторые задачи *интересными*, а некоторые — *скучными*, и каждой задаче присвоить некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за интересные задачи суммарно столько же баллов сколько за скучные. (Некоторые задачи могут быть не интересными и не скучными.)

3. Изначально все клетки доски 8×8 белые. За одну операцию разрешается перекрасить все клетки в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций все клетки можно перекрасить в чёрный цвет?

4. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак «+» или «–». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

5. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $n+m-1$ чисел.

6. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.