11 класс — **В преддверии Тургора** — 21 марта 2019

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

2. Подмножество студенческой группы назовём *идеальной компанией*, если в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам, причём в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив это условие. В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

3. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geqslant \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

4. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд, как на диаметре, построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2, как на диаметре, построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

5. Ладья непрерывно прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в чёрных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено? (Считается, что ладья прошла клетку, если хотя бы раз оказалась над ней.)

6. В куб поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в него можно было поместить и 4 таких же шара.

7. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a)+P(b)$ делится на $a+b$?

8. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.

11 класс — **В преддверии Тургора** — 21 марта 2019

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

2. Подмножество студенческой группы назовём *идеальной компанией*, если в этом подмножестве все девушки нравятся всем юношам, причём в это подмножество нельзя никого добавить, не нарушив это условие. В некой группе учатся 9 студенток и 15 студентов. Староста составил список всевозможных идеальных компаний в этой группе. Какое наибольшее число компаний могло оказаться в этом списке?

3. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geqslant \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

4. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд, как на диаметре, построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2, как на диаметре, построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

5. Ладья непрерывно прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в чёрных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено? (Считается, что ладья прошла клетку, если хотя бы раз оказалась над ней.)

6. В куб поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в него можно было поместить и 4 таких же шара.

7. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a)+P(b)$ делится на $a+b$?

8. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.