11 класс — Комбинаторная геометрия — 18 марта 2019

1. На плоскости отмечено 4038 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, среди которых выделены точки A и B. Докажите, что существует прямая, не проходящая через отмеченные точки, такая, что A и B лежат по разные стороны от этой прямой, и с каждой стороны от этой прямой лежит 2019 отмеченных точек.

2. Найдите все пары целых неотрицательных чисел (h, s) такие, что можно нарисовать h горизонтальных прямых и s прямых, не являющихся горизонтальными, которые удовлетворяют условиям:

- никакие две прямые среди s негоризонтальных не являются параллельными;
- никакие три проведенные прямые не пересекаются в одной точке;
- проведенные прямые разбивают плоскость на 2019 частей.

3. Правильный треугольник со стороной 2019 разбит на 2019^2 правильных треугольников со стороной 1. Какое наибольшее количество треугольников можно пересечь одной прямой? (Пересечения учитываются по строго внутренним точкам.)

4. На плоскости отмечено 2019 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть L — множество прямых, соединяющих две отмеченные точки. Докажите, что все эти точки можно раскрасить в один или два цвета так, чтобы любая пара отмеченных точек p и q была одноцветной тогда и только тогда, когда количество прямых из L, разделяющих точки p и q (т.е. таких, что p и q не лежат на прямой, но лежат в разных полуплоскостях, образованных этой прямой), четно.

5. На плоскости дано конечное множество точек S, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех выпуклых многоугольников, все вершины которых лежат в S. (Отрезок, соединяющий две точки, точка и пустое множество также считаются выпуклыми многоугольниками с 2, 1 и 0 вершинами соответственно.) Для многоугольника P из $\mathcal{P}$ определим $a(P)$ — количество вершин P и $b(P)$ — количество точек множества S, лежащих снаружи многоугольника P. Докажите, что для любого $x \in (0, 1)$ справедливо тождество

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

6. Дан правильный 2018-угольник. Назовем его диагональ *нечетной*, если с каждой стороны от этой диагонали лежит нечетное число сторон многоугольника. В этом 2018-угольнике провели 2015 попарно непересекающихся диагоналей, разбивающих его на треугольники. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников с двумя нечетными диагоналями могло получиться?

11 класс — Комбинаторная геометрия — 18 марта 2019

1. На плоскости отмечено 4038 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, среди которых выделены точки A и B. Докажите, что существует прямая, не проходящая через отмеченные точки, такая, что A и B лежат по разные стороны от этой прямой, и с каждой стороны от этой прямой лежит 2019 отмеченных точек.

2. Найдите все пары целых неотрицательных чисел (h, s) такие, что можно нарисовать h горизонтальных прямых и s прямых, не являющихся горизонтальными, которые удовлетворяют условиям:

- никакие две прямые среди s негоризонтальных не являются параллельными;
- никакие три проведенные прямые не пересекаются в одной точке;
- проведенные прямые разбивают плоскость на 2019 частей.

3. Правильный треугольник со стороной 2019 разбит на 2019^2 правильных треугольников со стороной 1. Какое наибольшее количество треугольников можно пересечь одной прямой? (Пересечения учитываются по строго внутренним точкам.)

4. На плоскости отмечено 2019 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть L — множество прямых, соединяющих две отмеченные точки. Докажите, что все эти точки можно раскрасить в один или два цвета так, чтобы любая пара отмеченных точек p и q была одноцветной тогда и только тогда, когда количество прямых из L, разделяющих точки p и q (т.е. таких, что p и q не лежат на прямой, но лежат в разных полуплоскостях, образованных этой прямой), четно.

5. На плоскости дано конечное множество точек S, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех выпуклых многоугольников, все вершины которых лежат в S. (Отрезок, соединяющий две точки, точка и пустое множество также считаются выпуклыми многоугольниками с 2, 1 и 0 вершинами соответственно.) Для многоугольника P из $\mathcal{P}$ определим $a(P)$ — количество вершин P и $b(P)$ — количество точек множества S, лежащих снаружи многоугольника P. Докажите, что для любого $x \in (0, 1)$ справедливо тождество

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

6. Дан правильный 2018-угольник. Назовем его диагональ *нечетной*, если с каждой стороны от этой диагонали лежит нечетное число сторон многоугольника. В этом 2018-угольнике провели 2015 попарно непересекающихся диагоналей, разбивающих его на треугольники. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников с двумя нечетными диагоналями могло получиться?