11 класс **Разнобой** 7 марта 2019

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n $(1 \leqslant n \leqslant 30)$ — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M. Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$.

3. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — точка на окружности ω, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP, совпадает с центром окружности ω.

4. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ $(N > 3)$ попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

• для любых N векторов этого множества найдется ещё такой $N-1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N-1$ векторов равна нулю;

• для любых N векторов этого множества найдутся ещё такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

5. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполнено $P(x) - P(y) = R(x, y) \cdot (Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

7. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.

11 класс **Разнобой** 7 марта 2019

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n $(1 \leqslant n \leqslant 30)$ — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M. Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$.

3. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — точка на окружности ω, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP, совпадает с центром окружности ω.

4. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ $(N > 3)$ попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

• для любых N векторов этого множества найдется ещё такой $N-1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N-1$ векторов равна нулю;

• для любых N векторов этого множества найдутся ещё такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

5. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполнено $P(x) - P(y) = R(x, y) \cdot (Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

7. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.