11 класс **Теория чисел** 4 марта 2019

1. При каком наименьшем n существуют различные натуральные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{51}{2010}?$$

2. Для различных натуральных чисел a и b число $ab(a+b)$ кратно a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b|^3 \geqslant 3ab$.

3. Пусть $t(n)$ — количество делителей числа n, а $t_1(n)$ — количество делителей числа n, дающих остаток 1 при делении на 3. Какие целые значения может принимать дробь $\frac{t(10n)}{t_1(10n)}$ при натуральных n?

4. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a-b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a+kb$ может также оказаться равной 15?

5. Найдите все пары (p,k), где p — простое число, k — натуральное, при которых $p^2-p+1=k^3$.

6. При каких натуральных n существуют натуральные числа a,b,c,d такие, что $n=a^2+b^2+c^2+d^2$?

7. Дано натуральное n. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $[x/2]+[x/4]+\ldots+[x/2^n]=\ldots$, если справа стоит
а) $x-1$; **б)** $x-2$; **в)** $x-d$?

8. Не все натуральные числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ равны. Докажите, что числа вида $a_1^k+\ldots+a_n^k$ при натуральных k имеют сколь угодно большие простые делители.

11 класс **Теория чисел** 4 марта 2019

1. При каком наименьшем n существуют различные натуральные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{51}{2010}?$$

2. Для различных натуральных чисел a и b число $ab(a+b)$ кратно a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b|^3 \geqslant 3ab$.

3. Пусть $t(n)$ — количество делителей числа n, а $t_1(n)$ — количество делителей числа n, дающих остаток 1 при делении на 3. Какие целые значения может принимать дробь $\frac{t(10n)}{t_1(10n)}$ при натуральных n?

4. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a-b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a+kb$ может также оказаться равной 15?

5. Найдите все пары (p,k), где p — простое число, k — натуральное, при которых $p^2-p+1=k^3$.

6. При каких натуральных n существуют натуральные числа a,b,c,d такие, что $n=a^2+b^2+c^2+d^2$?

7. Дано натуральное n. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $[x/2]+[x/4]+\ldots+[x/2^n]=\ldots$, если справа стоит
а) $x-1$; **б)** $x-2$; **в)** $x-d$?

8. Не все натуральные числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ равны. Докажите, что числа вида $a_1^k+\ldots+a_n^k$ при натуральных k имеют сколь угодно большие простые делители.