11 класс | Разнобой | 21 января 2019

1. Какое наибольшее конечное количество корней может иметь уравнение $|x-a_1|+\ldots+|x-a_{50}| = |x-b_1|+\ldots+|x-b_{50}|$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ — различные числа?

2. Существует ли ограниченная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(1) > 0$, причем $f(x)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$

3. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, ребра которых параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz так, чтобы P_2 пересекался (т. е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме P_1 и P_3, P_3 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_2 и P_4, и т.д., P_{12} пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{11} и P_1, P_1 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{12} и P_2? (Поверхность параллелепипеда ему принадлежит.)

4. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Пусть A', B' и C' — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников $A'B'C$, $AB'C'$ и $A'BC'$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

6. Четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

7. Натуральные числа x, y, z $(x > 2, y > 1)$ таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q+2$.

8. За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и никакие двое из одной группы не сидят за столом рядом.

11 класс | Разнобой | 21 января 2019

1. Какое наибольшее конечное количество корней может иметь уравнение $|x-a_1|+\ldots+|x-a_{50}| = |x-b_1|+\ldots+|x-b_{50}|$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ — различные числа?

2. Существует ли ограниченная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(1) > 0$, причем $f(x)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$

3. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, ребра которых параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz так, чтобы P_2 пересекался (т. е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме P_1 и P_3, P_3 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_2 и P_4, и т.д., P_{12} пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{11} и P_1, P_1 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{12} и P_2? (Поверхность параллелепипеда ему принадлежит.)

4. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Пусть A', B' и C' — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников $A'B'C$, $AB'C'$ и $A'BC'$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

6. Четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O. Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

7. Натуральные числа x, y, z $(x > 2, y > 1)$ таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q+2$.

8. За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и никакие двое из одной группы не сидят за столом рядом.