11 класс Добрая геометрия 20 декабря 2018

1. Дан остроугольный треугольник ABC с наибольшим углом B, точка O – центр его описанной окружности. Серединные перпендикуляры к сторонам BC и BA пересекают сторону AC в точках X и Y соответственно. Биссектрисы углов BXA и BYC пересекают стороны BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что если $DE \parallel AC$, то $BO \perp AC$.

2. Сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника равна 20, а сумма длин каких-то двух противоположных сторон равна 12. Найдите наибольшую возможную площадь этого четырёхугольника.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей Эйлера треугольников ABC, BCD, CDA, DAB образуют четырёхугольник, подобный $ABCD$.

4. Докажите, что проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану, проведённую из вершины B, лежит на окружности, проходящей через точки A и B, касающейся прямой AC.

5. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle BA_1C_1 = \angle CB_1A_1$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

6. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1B пересекает S_2 в точке F, а луч O_2B пересекает S_1 в точке E. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF, вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AE + AF$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — биссектрисы внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C — в точке L, прямые l_C и l_D — в точке M, прямые l_D и l_A — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, тоже касаются внешним образом.

11 класс Добрая геометрия 20 декабря 2018

1. Дан остроугольный треугольник ABC с наибольшим углом B, точка O – центр его описанной окружности. Серединные перпендикуляры к сторонам BC и BA пересекают сторону AC в точках X и Y соответственно. Биссектрисы углов BXA и BYC пересекают стороны BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что если $DE \parallel AC$, то $BO \perp AC$.

2. Сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника равна 20, а сумма длин каких-то двух противоположных сторон равна 12. Найдите наибольшую возможную площадь этого четырёхугольника.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей Эйлера треугольников ABC, BCD, CDA, DAB образуют четырёхугольник, подобный $ABCD$.

4. Докажите, что проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану, проведённую из вершины B, лежит на окружности, проходящей через точки A и B, касающейся прямой AC.

5. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle BA_1C_1 = \angle CB_1A_1$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

6. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1B пересекает S_2 в точке F, а луч O_2B пересекает S_1 в точке E. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF, вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AE + AF$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — биссектрисы внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C — в точке L, прямые l_C и l_D — в точке M, прямые l_D и l_A — в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, тоже касаются внешним образом.