11 класс — **Теория чисел** — 17 декабря 2018

1. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2018-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих.

2. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$-й степенью.

3. Натуральное n таково, что число $k = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ – целое. Докажите, что k – точный квадрат.

4. Серёжа написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

5. Докажите, что для любого натурального n найдётся n-значное число без нулей в десятичной записи, кратное сумме своих цифр.

6. Дано натуральное a, делящееся на 2014. Докажите, что среди чисел вида $2^n + a$ $(n \in \mathbb{N})$ лишь конечное количество точных квадратов.

7. В равенстве $2^s q = p^y - 1$ числа s, p, q — простые, $y > 1$. Найдите p.

8. При каких натуральных n число $3^n - 2$ является точным квадратом?

9. Натуральные x, y, m, n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Какое наименьшее значение может принимать величина $\min(m, n)$?

11 класс — **Теория чисел** — 17 декабря 2018

1. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2018-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих.

2. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$-й степенью.

3. Натуральное n таково, что число $k = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ – целое. Докажите, что k – точный квадрат.

4. Серёжа написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

5. Докажите, что для любого натурального n найдётся n-значное число без нулей в десятичной записи, кратное сумме своих цифр.

6. Дано натуральное a, делящееся на 2014. Докажите, что среди чисел вида $2^n + a$ $(n \in \mathbb{N})$ лишь конечное количество точных квадратов.

7. В равенстве $2^s q = p^y - 1$ числа s, p, q — простые, $y > 1$. Найдите p.

8. При каких натуральных n число $3^n - 2$ является точным квадратом?

9. Натуральные x, y, m, n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Какое наименьшее значение может принимать величина $\min(m, n)$?