11 класс	Скалярное произведение	3 декабря 2018

Определение. *Скалярным произведением* в пространстве V над полем $\mathbb{F}$ называется операция $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{F}$ такая, что

- $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$ для любых $u,v\in V$;
- $\langle\lambda u+\mu v,w\rangle=\lambda\langle u,w\rangle+\mu\langle v,w\rangle$ для любых $u,v,w\in V$, $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$;
- если $\mathbb{F}$ — упорядоченное поле (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$), то $\langle v,v\rangle\geq 0$, причем равенство достигается только при $v=0$.

Два вектора u,v называются *ортогональными*, если $\langle u,v\rangle=0$.

0. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ — базис в пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Определим операцию $f\colon V\times V\to\mathbb{F}$: пусть векторы $u,v\in V$ раскладываются как $u=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$, $v=y_1e_1+y_ne_n$, тогда $f(u,v)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$. Докажите, что f является скалярным произведением в пространстве V.

1. Пусть $U\subset V$ — два конечномерных векторных пространства с размерностями k и n соответственно. Пусть $U^\perp$ — множество векторов из V, ортогональных всем векторам из U. Докажите, что

а) $U^\perp$ — векторное пространство. (Оно называется *ортогональным дополнением* пространства U в пространстве V.)

б) $\dim U^\perp=n-k$.

в) Если U и V — векторные пространства над $\mathbb{Q}$ или над $\mathbb{R}$, то для любого вектора $v\in V$ однозначно определены векторы $u_1\in U,u_2\in U^\perp$ такие, что $u_1+u_2=v$.

2. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могут ходить во дворец пионеров, если каждый из них посещает

а) нечетное; **б)** четное число кружков?

3. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k\leqslant n$.

4. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами "да" и "нет", за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k\leqslant n$.

5. Пусть V — конечномерное пространство над $\mathbb{R}$ с заданным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Докажите, что в пространстве V существует базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ такой, что $\langle e_i,e_i\rangle=1$, а $\langle e_i,e_j\rangle=0$ при $i\neq j$. Такой базис называется *ортонормированным.*

6. Неравенство Фишера. Пусть $A_1,\ldots,A_m$ — различные непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m\leqslant n$.

7. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается *хорошим*, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.

8. Ученики 11Б класса часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учеников в 11Б классе.