11 класс	Поля и расширения	18 октября 2018

Определение. Назовем два поля *изоморфными*, если между ними существует биекция, сохраняющая сумму и произведение двух чисел.

1. Докажите, что при изоморфизме ноль переходит в ноль, единица в единицу, разность в разность, а частное в частное.

2. Докажите, что любое поле содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p$.

Определение. Пусть $K \subset L$ — поля. Тогда L называется *расширением* поля K. При этом L образует векторное пространство над K. Тогда размерность такого векторного пространства будем называть *размерностью расширения* L над K и обозначать через $[L : K]$. Если векторное пространство конечномерно, то будем говорить, что расширение конечно.

3. **(a)** Существует ли поле из шести элементов?

(b) При каких n *может существовать* поле из n элементов?

(c) Существует ли поле из четырех элементов?

Определение. Пусть $K \subset L$ — поля, S — некоторое подмножество в L. Тогда обозначим через $K(S)$ — минимальное поле, содержащее все элементы из поля K и все элементы из множества S. Будем говорить, что $K(S)$ — поле, полученное присоединением элементов из S к полю K.

4. Докажите, что для любых K, L, S из определения выше $K(S)$ существует и определено единственным образом.

Определение. Пусть $K \subset L$ — поля. Элемент $\alpha \in L$ называется *алгебраическим* над K, если α — корень некоторого многочлена из $K[x]$ (можно считать, что неприводимого над K). В противном случае будем говорить, что элемент α *трансцендентен* над K.

5. **(a)** Какие элементы из $\mathbb{C}$ являются алгебраическими над $\mathbb{R}$, а какие — трансцендентными?

(b) Докажите, что существуют числа, трансцендентные над $\mathbb{Q}$.

6. Пусть α — трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент. Докажите, что поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ изоморфно полю рациональных функций (т.е. отношений двух многочленов) над $\mathbb{Q}$.

7. Пусть α — корень неприводимого над K многочлена степени n. Докажите, что $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ — базис в пространстве $K(\alpha)$ над K.

8. Пусть α, β — корни одного и того же неприводимого многочлена степени n над K. Докажите, что поля $K(\alpha)$ и $K(\beta)$ изоморфны. Обязательно ли они совпадают?

9. **Теорема об алгебраичности конечного расширения.** Пусть $K \subset F$ и $[F : K] = n$. Тогда каждый элемент из F — корень некоторого многочлена степени не выше n с коэффициентами из K.

10. Докажите, что множество чисел, алгебраических над полем K, является полем.

11. **Теорема о размерности башни.** Пусть $K \subset L \subset F$ — поля. Докажите, что расширение F над K конечно тогда и только тогда, когда конечны расширения F над L и L над K, причем $[F : K] = [F : L] \cdot [L : K]$.

12. Чему равна размерность расширения $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}) : \mathbb{Q}]$?

13. Пусть α, β — два корня многочлена $x^3 - 17$. Найдите размерность расширения $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$.

14. Пусть $r = \sqrt[15]{15}$. Рассмотрим число $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_{14} r^{14}, a_i \in \mathbb{Q}$. Пусть оно является корнем неприводимого многочлена. Чему может равняться степень этого многочлена?

15. Пусть $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ — башня расширений, причем $[F_{i+1} : F_i]$ равно 2, 3 или 4. Докажите, что $\sqrt[5]{5} \notin F_n$.

16. Пусть F — расширение $\mathbb{Q}$. Чему может быть равно $[F(\sqrt[5]{5}) : F]$?

17. **(a)** Пусть на плоскости дан отрезок длины 1. Оказалось, что, используя циркуль и линейку, можно построить отрезок длины α. Докажите, что при некотором n существует башня расширений $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ такая, что $[F_{i+1} : F_i] = 2$ и $\alpha \in F_n$.

(b) Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя построить циркулем и линейкой.

(c) Докажите, что $\cos \frac{\pi}{18}$ нельзя построить циркулем и линейкой.

(d) Докажите, что при помощи циркуля и линейки нельзя разделить заданный угол на три части.

Определение. Назовем поле K *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен ненулевой степени с коэффициентами из K имеет корень в поле K.

18. Для поля K обозначим через $\overline{K}$ множество корней многочленов с коэффициентами из K. Докажите, что $\overline{K}$ алгебраически замкнуто. Поле $\overline{K}$ называется *алгебраическим замыканием поля* K.