11 класс — **Стереометрия без сфер** — 11 октября 2018

1. В n-угольной пирамиде основание — правильный многоугольник, а все боковые грани — равнобедренные треугольники. При каком наименьшем n пирамида обязана быть правильной?

2. Дана правильная пирамида $SA_1A_2\dots A_n$ с вершиной S. Точка K в основании такова, что все углы $\angle SA_iK$ равны при всех $i=1,\dots,n$. При каком наименьшем n отрезок SK обязан быть высотой пирамиды?

3. Рассмотрим три угла между биссектрисами плоских углов некоторого трёхгранного угла. Один из них оказался прямым. Найдите два других.

4. Теорема Менелая. На рёбрах AB, BC, CD, DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На её рёбрах SA, SB, SC, SD выбраны точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{AK}{KS}+\frac{CM}{MS}=\frac{BL}{LS}+\frac{DN}{NS}$.

6. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

7. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.

8. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1, причём его рёбра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Пусть P и P_1 — точки пересечения троек плоскостей A_1BC, AB_1C, ABC_1 и AB_1C_1, A_1BC_1,A_1B_1C соответственно. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.

9. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

10. Точка O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Пусть ℓ_A — прямая, соединяющая точку пересечения медиан грани BCD с точкой, симметричной A относительно O. Аналогично определены прямые ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D.

а) Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения из пункта а) с серединой ребра AB, перпендикулярна CD.

11. Назовём многогранник *кубоподобным*, если у него шесть четырёхугольных граней и восемь вершин, в каждой из которых сходится по три грани.

Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника, пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.

11 класс — **Стереометрия без сфер** — 11 октября 2018

1. В n-угольной пирамиде основание — правильный многоугольник, а все боковые грани — равнобедренные треугольники. При каком наименьшем n пирамида обязана быть правильной?

2. Дана правильная пирамида $SA_1A_2\dots A_n$ с вершиной S. Точка K в основании такова, что все углы $\angle SA_iK$ равны при всех $i=1,\dots,n$. При каком наименьшем n отрезок SK обязан быть высотой пирамиды?

3. Рассмотрим три угла между биссектрисами плоских углов некоторого трёхгранного угла. Один из них оказался прямым. Найдите два других.

4. Теорема Менелая. На рёбрах AB, BC, CD, DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$.

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На её рёбрах SA, SB, SC, SD выбраны точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{AK}{KS}+\frac{CM}{MS}=\frac{BL}{LS}+\frac{DN}{NS}$.

6. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

7. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.

8. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1, причём его рёбра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Пусть P и P_1 — точки пересечения троек плоскостей A_1BC, AB_1C, ABC_1 и AB_1C_1, A_1BC_1,A_1B_1C соответственно. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.

9. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

10. Точка O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Пусть ℓ_A — прямая, соединяющая точку пересечения медиан грани BCD с точкой, симметричной A относительно O. Аналогично определены прямые ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D.

а) Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения из пункта а) с серединой ребра AB, перпендикулярна CD.

11. Назовём многогранник *кубоподобным*, если у него шесть четырёхугольных граней и восемь вершин, в каждой из которых сходится по три грани.

Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника, пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.