

Определение. Пусть задано множество вершин V , среди которых выделено две, вход s и выход t . Пусть задана функция $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0.$$

Тогда четверка $G = (V, s, t, c)$ называется *сетью*, а функция c — *пропускной способностью* этой сети.

Определение. Пусть задана функция $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяющая условиям:

1. $f(x, y) \leq c(x, y)$;
2. $f(x, y) = -f(y, x)$;
3. если $x \neq s, t$, то $\sum_{y \in V} f(x, y) = 0$.

Тогда f называется *поток* в сети G . *Величиной потока* называется значение $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$. Поток называется *максимальным*, если его величина максимальна.

Определение. Пусть множество V разбито на две части S и T , причем $s \in S$, $t \in T$. Тогда пару (S, T) будем называть *разрезом* сети G . *Потоком через разрез (S, T)* будем называть величину $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$. *Пропускной способностью разреза (S, T)* — величину $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$. Разрез называется *минимальным*, если его пропускная способность минимальна.

Определение. Для потока f в сети G определим *остаточную сеть G_f* с теми же множеством вершин, входом и выходом, пропускная способность которой задана следующим образом $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$.

Определение. Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех пар (x, y) , что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f .

1. Докажите, что для любого потока f и разреза (S, T) выполнено $|f| = f(S, T)$.

2. Теорема Форда-Фалкерсона. Пусть в сети G с пропускной способностью c задан поток f . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Поток f — максимальный.
2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
3. Существует разрез (S, T) такой, что $f(S, T) = c(S, T)$.

3. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что тогда в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро целый).

Докажите следующие теоремы, используя теорему Форда-Фалкерсона.

4. Теорема Холла. Пусть в двудольном графе $G = (L, R, E)$ для любого k и k -элементного подмножества $L_0 \subset L$ количество вершин из R , смежных хотя бы с одной из вершин множества L_0 не меньше, чем k . Тогда в графе есть паросочетание, содержащее все вершины из L .

5. Теорема Кёнига. Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k . Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.

6. Теорема Менгера. Даны граф G и две его вершины u, v .

(а) Пусть граф остается связным при выкидывании любых $(n - 1)$ ребра. Тогда можно выделить n реберно непересекающихся путей из u в v .

(б) Пусть при выкидывании любых $(n - 1)$ вершины u и v остаются в одной компоненте связности. Тогда существует n вершинно непересекающихся путей из u в v .

7. Теорема Дилуорса. Пусть на множестве S задан *частичный порядок*, т.е. для некоторых пар (x, y) известно, что $x \succ y$, причем нет пары (x, y) такой, что $x \succ y$ и $y \succ x$, а также из $x \succ y$, $y \succ z$ следует, что $x \succ z$. *Цепью* назовем подмножество, в котором любые два элемента сравнимы, а *антицепью* — подмножество, в котором любые два не сравнимы. Пусть в множестве S нет антицепи размера больше, чем k . Тогда S разбивается на k непересекающихся цепей.