11 класс Геометрический разнобой 27 сентября 2018

1. На стороне ML квадрата $KMLN$ вне него построен прямоугольный треугольник CML. Катеты CM и CL продолжены до пересечения с прямой KN в точках A и B соответственно. Отрезок AL пересекает KM в точке P, отрезок BM пересекает NL в точке Q. Докажите, что треугольник CPQ — равнобедренный.

2. Пусть Γ — окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, причём $AD = AE$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BD и CE пересекают меньшие дуги AB и AC окружности Γ в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.

3. Прямая, проходящая через основания биссектрис углов B и C треугольника ABC, пересекает его описанную окружность в точках P и Q; точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника PIQ вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили середины C_1, B_1, A_1 сторон AB, AC, BC соответственно. Серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AA_1 в точках B_2, C_2 соответственно. Прямые BB_2 и CC_2 пересекаются в точке X, лежащей внутри треугольника. Докажите, что точки A, B_1, C_1, X лежат на одной окружности.

5. Точка M лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Луч BM пересекает AC в точке P. Точка K симметрична точке M относительно прямой AC. Луч BK пересекает сторону AC в точке Q. Оказалось, что $\angle CMQ = \angle AMP$. Докажите, что $\angle CBQ = \angle ABP$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается ω.

7. На стороне AB описанного четырёхугольника $ABCD$ отметили точку K. Точки I_1, I_2 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников AKD, CKD и BKC соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, I_3 и K лежат на одной окружности.

8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X внутри него такова, что $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$. Докажите, что $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

11 класс Геометрический разнобой 27 сентября 2018

1. На стороне ML квадрата $KMLN$ вне него построен прямоугольный треугольник CML. Катеты CM и CL продолжены до пересечения с прямой KN в точках A и B соответственно. Отрезок AL пересекает KM в точке P, отрезок BM пересекает NL в точке Q. Докажите, что треугольник CPQ — равнобедренный.

2. Пусть Γ — окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, причём $AD = AE$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BD и CE пересекают меньшие дуги AB и AC окружности Γ в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.

3. Прямая, проходящая через основания биссектрис углов B и C треугольника ABC, пересекает его описанную окружность в точках P и Q; точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника PIQ вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили середины C_1, B_1, A_1 сторон AB, AC, BC соответственно. Серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AA_1 в точках B_2, C_2 соответственно. Прямые BB_2 и CC_2 пересекаются в точке X, лежащей внутри треугольника. Докажите, что точки A, B_1, C_1, X лежат на одной окружности.

5. Точка M лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Луч BM пересекает AC в точке P. Точка K симметрична точке M относительно прямой AC. Луч BK пересекает сторону AC в точке Q. Оказалось, что $\angle CMQ = \angle AMP$. Докажите, что $\angle CBQ = \angle ABP$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается ω.

7. На стороне AB описанного четырёхугольника $ABCD$ отметили точку K. Точки I_1, I_2 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников AKD, CKD и BKC соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, I_3 и K лежат на одной окружности.

8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Точка X внутри него такова, что $\angle XAB = \angle XCD$ и $\angle XBC = \angle XDA$. Докажите, что $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.