11 класс — Мегаразнобой — 17 сентября 2018

1. На доске написаны три числа (не обязательно различных). Каждое из них уменьшили на 1, их произведение от этого тоже уменьшилось на 1. Каждое из трёх новых чисел снова уменьшили на 1, и от этого произведение новых чисел снова уменьшилось на 1. Найдите исходные числа.

2. Выпишем в строчку в порядке возрастания все натуральные делители числа $4k$ ($k \in \mathbb{N}$). Докажите, что найдутся два соседних делителя с разностью 2.

3. Петя и Вася играют в следующую игру. Вася заполняет числами от 1 до 10000 клетки таблицы 100×100 (каждое — по одному разу). Петя хочет пройти шахматным королём от левого края доски до правого. При этом если он ставит короля на какую-то клетку, то он обязан заплатить Васе такое число рублей, которое на ней написано. Сколько Петя заплатит Васе при правильной игре? (Петя хочет заплатить как можно меньше, Вася — получить как можно больше.)

4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.

5. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{2}$. Правительство страны Оптимистики ежегодно публикует *годовой отчёт*, содержащий n экономических индикаторов, причём каждый i-й индикатор может принимать значения $1, 2, \ldots, a_i$. Годовой отчёт называется *оптимистичным*, если по сравнению с прошлым годом выросли все индикаторы, кроме, быть может, одного. Докажите, что правительство может выпускать оптимистичные годовые отчёты бесконечно долго.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Точка P на меньшей дуге DE окружности такова, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $DE = 2KL$.

7. Дано простое число $p = 8k+5$ ($k \in \mathbb{N}$). Целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$ таковы, что числа $0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ попарно не сравнимы по модулю p. Докажите, что произведение $\prod\limits_{1 \le i < j \le 2k+1} (r_i^4 + r_j^4)$ сравнимо с $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модулю p.

8. Дан вписанный и описанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F — окружности, вписанные в треугольники FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA соответственно. Пусть l_{AB} — вторая общая внешняя касательная к окружностям ω_A и ω_B. Аналогично определим прямые l_{BC}, l_{CD}, l_{DE}, l_{EF} и l_{FA}. Пусть A_1 — точка пересечения прямых l_{AB} и l_{FA}; B_1 — точка пересечения прямых l_{BC} и l_{AB}; точки C_1, D_1, E_1 и F_1 определяются аналогично. Докажите, что главные диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в одной точке.

11 класс — Мегаразнобой — 17 сентября 2018

1. На доске написаны три числа (не обязательно различных). Каждое из них уменьшили на 1, их произведение от этого тоже уменьшилось на 1. Каждое из трёх новых чисел снова уменьшили на 1, и от этого произведение новых чисел снова уменьшилось на 1. Найдите исходные числа.

2. Выпишем в строчку в порядке возрастания все натуральные делители числа $4k$ ($k \in \mathbb{N}$). Докажите, что найдутся два соседних делителя с разностью 2.

3. Петя и Вася играют в следующую игру. Вася заполняет числами от 1 до 10000 клетки таблицы 100×100 (каждое — по одному разу). Петя хочет пройти шахматным королём от левого края доски до правого. При этом если он ставит короля на какую-то клетку, то он обязан заплатить Васе такое число рублей, которое на ней написано. Сколько Петя заплатит Васе при правильной игре? (Петя хочет заплатить как можно меньше, Вася — получить как можно больше.)

4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Прямые BP и DQ пересекаются в точке X, а прямые BQ и DP — в точке Y. Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC.

5. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{2}$. Правительство страны Оптимистики ежегодно публикует *годовой отчёт*, содержащий n экономических индикаторов, причём каждый i-й индикатор может принимать значения $1, 2, \ldots, a_i$. Годовой отчёт называется *оптимистичным*, если по сравнению с прошлым годом выросли все индикаторы, кроме, быть может, одного. Докажите, что правительство может выпускать оптимистичные годовые отчёты бесконечно долго.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Точка P на меньшей дуге DE окружности такова, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $DE = 2KL$.

7. Дано простое число $p = 8k+5$ ($k \in \mathbb{N}$). Целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_{2k+1}$ таковы, что числа $0, r_1^4, r_2^4, \ldots, r_{2k+1}^4$ попарно не сравнимы по модулю p. Докажите, что произведение $\prod\limits_{1 \le i < j \le 2k+1} (r_i^4 + r_j^4)$ сравнимо с $(-1)^{k(k+1)/2}$ по модулю p.

8. Дан вписанный и описанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть ω_A, ω_B, ω_C, ω_D, ω_E и ω_F — окружности, вписанные в треугольники FAB, ABC, BCD, CDE, DEF и EFA соответственно. Пусть l_{AB} — вторая общая внешняя касательная к окружностям ω_A и ω_B. Аналогично определим прямые l_{BC}, l_{CD}, l_{DE}, l_{EF} и l_{FA}. Пусть A_1 — точка пересечения прямых l_{AB} и l_{FA}; B_1 — точка пересечения прямых l_{BC} и l_{AB}; точки C_1, D_1, E_1 и F_1 определяются аналогично. Докажите, что главные диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в одной точке.