Серия 19. Расстановка весов

1. **(a)** В некоторых клетках бесконечной полосы лежат камни (может быть более одного камня в клетке, всего камней конечное число). Разрешается убрать два камня, лежащие в одной клетке, и положить один камень в клетку правее. Докажите, что конечная расстановка камней (то есть расстановка, в которой такую операцию нельзя будет сделать) не зависит от порядка действий и зависит только от первоначальной расстановки.

   (b) То же самое, но действие такое: убирается по камню с клеток i и $i+1$ и кладётся камень в клетку $i+2$. Докажите, что все расстановки, получаемые из заданной начальной, в которых в каждой клетке не более одного камня и нет двух соседних занятых клеток, одинаковые.

2. На бесконечной в обе стороны полосе клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек. Разрешается выбрать фишки, расстояние между которыми превышает 2, и сдвинуть их одновременно навстречу друг другу. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких операций.

3. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1. В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

4. У каждого из школьников, ходящих на кружок в 10 класс не больше 20 друзей. Их случайно делят на группы 10-1 и 10-2. Хочется, чтобы у каждого школьника из группы 10-1 было не более 5 друзей внутри группы, а у каждого школьника из группы 10-2 было не более 15 друзей внутри группы. Каждый день одного из школьников, нарушающих это правило, переводят в другую группу. Докажите, что этот процесс когда-то завершится.

5. На бесконечной ленте выписана некоторая конечная последовательность из 0 и 1. Каждую секунду выбирается случайный кусок «10» и заменяется на кусок «011111». Докажите, что рано или поздно процесс остановится.

6. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

7. В некоторых клетках клетчатой полосы $1 \times n$ стоят фишки. В первой клетке (самой левой) x_1 штук, во второй — x_2, …, в n-й клетке — x_n. Двое игроков играют в следующую игру: каждым ходом первый игрок выбирает некоторое подмножество фишек, а второй либо передвигает все фишки этого подмножества на 1 клетку влево, а остальные убирает с доски, либо делает то же самое с дополнением выбранного подмножества. Первый хочет, чтобы какая-то фишка оказалась в самой первой клетке, а второй хочет ему помешать. При каких $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у первого игрока есть выигрышная стратегия?