ЦПМ. Группа 10-2 **22.04.2019**

Серия 45. Гармонический ряд

Гармония — это сочетание противоположностей.

Аристотель

Назовём ряд
$$H(m,n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$
гармоническим.

1. Докажите, что $H(m,n)$ не является целым ни при каких различных m и n.

2. Пусть $H(m,n)=\frac{p}{q}$ и $m+n$ нечётно. Докажите, что $m+n$ делится на p.

3. Дано выражение
$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{1993006}}.$$
Докажите, что $S>1001$.

4. Пусть p, q — натуральные числа такие, что
$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$
Докажите, что p делится на 1979.

5. Пусть
$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020},$$
$$B=\frac{1}{1011\cdot 2020}+\frac{1}{1012\cdot 2019}+\ldots+\frac{1}{2020\cdot 1011}.$$
Вычислите A/B.

6. Пусть $m>1$ — натуральное число. Докажите, что $1/m$ можно представить в виде суммы нескольких последовательных слагаемых ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)}$.

7. Докажите, что при простых $p\geqslant 5$
$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}\equiv 0 \mod p^2.$$