

Точка Торричелли

Une hirondelle ne fait pas le printemps

1. В треугольнике ABC все углы меньше 120° . Найдите внутри треугольника точку T такую, что сумма $AT + BT + CT$ наименьшая.
2. В треугольнике ABC угол A не меньше 120° . Найдите внутри треугольника точку T такую, что сумма $AT + BT + CT$ наименьшая.
3. В треугольнике ABC все углы меньше 120° . На его стороне во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Докажите, что описанные окружности этих треугольников и отрезки AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке — точке Торричелли. Кроме того, $AA' = BB' = CC'$.
4. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC' , BCA' , CAB' являются вершинами равностороннего треугольника (треугольника Наполеона). Чему равна сторона треугольника Наполеона, если $AA' = x$.
5. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC' , BCA' , CAB' являются вершинами равностороннего треугольника (внутреннего треугольника Наполеона).
6. Докажите, что разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона равна площади исходного треугольника.
7. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность. Докажите, что если точка M лежит на меньшей дуге AB этой окружности, то $MC = MA + MB$, а для всех остальных точек M этой плоскости выполнено неравенство $MC < MA + MB$ (теорема Помпею).
8. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон — величина постоянная.
9. Через каждую вершину треугольника проведите прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему эту вершину с точкой Торричелли. Докажите, что эти прямые образуют равносторонний треугольник.
10. На плоскости даны две точки и прямая. Найдите точку, сумма расстояний от которой до данных точек и до прямой минимальна.