

Серия 42. Упорядочивание

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.
2. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Напишите наименьшее возможное число гирь в наборе.
3. Возрастающая последовательность $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ такова, что любой её член делится на 1005 или на 1006, но не делится на 97. Для какого наименьшего k существует последовательность, такая что разность между любыми соседними членами этой последовательности не более k ?
4. 2000 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Доказать, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
5. На столе лежат две кучки монет. Известно, что суммарный вес монет из первой кучки равен суммарному весу монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, суммарный вес k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммарного веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x , на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй, каково бы ни было положительное число x .
6. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.
7. Даны различные действительные числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Рассматриваются все возможные непустые подмножества сумм из этих 10 чисел. Пусть среди них ровно k различных.
 - а) Найдите наименьшее значение которое может принимать k
 - б) Найдите все значения которые может принимать k .