

Серия 41. Клеточки

Считаем что-нибудь

1. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, что все 9 клеток, стоящие на их пересечениях, покрашены в один цвет.
2. В некоторые 16 клеток доски 8×8 поставили по ладье. Какое наименьшее количество пар бьющих друг друга ладей могло при этом оказаться?
3. Каждая клетка квадратной доски 12×12 окрашена в один из 3 цветов. Докажите, что найдется прямоугольник, образованный горизонтальными и вертикальными линиями доски, все четыре угловые клетки которого окрашены в одинаковый цвет
4. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно соседние с этой клеткой).
5. Фигура «мамонт» бьет как слон (по диагоналям), но только в трех направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8 ?

Преобразования таблицы.

6. В клетчатой таблице $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». За одну операцию поменять знаки во всех клетках строки или столбца. Известно, что из этой таблицы можно сделать таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать не более, чем за n таких операций.
7. В клетчатой таблице 5×5 стоят знаки «+» и «-». За одну операцию разрешено выбрать одну клетку, и поменять знаки в этой клетке и во всех клетках, стоящих с ней в одной строке и одном столбце. Известно, что из этой таблицы можно сделать таблицу из одних плюсов. Докажите, что это можно сделать не более, чем за
 - а) 20 таких операций.
 - б) 11 таких операций.
8. В клетчатой таблице $2n \times 2n$ стоят знаки «+» и «-». За одну операцию разрешено выбрать одну клетку, и поменять знаки в этой клетке и во всех клетках, стоящих с ней в одной строке и одном столбце. Докажите, что можно получить доску из одних знаков «+».