ЦПМ. Группа 10-2 **18.03.2019**

Серия 36. Постулат Бертрана

Пусть R_n — произведение всех простых чисел от $n+1$ до $2n$ (если таковых нет, то произведение считается равным единице).

1) Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.

2) Докажите, что если $p > 2n$, то C_{2n}^n не делится на p.

3) Докажите, что если $n < p < 2n$, то p входит в C_{2n}^n ровно в первой степени.

4) Докажите, что если $\frac{2n}{3} < p \leqslant n$, то C_{2n}^n не делится на p.

5) Докажите, что если $p > \sqrt{2n}$, то p входит в C_{2n}^n не более чем в первой степени.

6) Докажите, что если C_{2n}^n делится на p^k, то $p^k \leqslant 2n$.

7) Докажите, что $C_{2n}^n < 4^n$ при любом натуральном n.

8) Докажите, что $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ при любом натуральном n.

9) Докажите, что C_{2n}^n делится на произведение всех простых p, для которых $n < p < 2n$.

10) Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n, меньше 4^n.

11) Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}}$ при всех натуральных n.

12) Докажите, что $\pi(x) \leqslant \frac{x}{2}$ при $x \geqslant 8$.

13) Докажите, что $R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}}$ при всех натуральных $n \geqslant 32$.

14) Докажите, что $2^k > 6k$ при натуральных $k \geqslant 6$.

15) Докажите, что $2^x > 6x$ при вещественных $x \geqslant 6$.

16) Докажите, что $(2n)^{\sqrt{n/2}} < 2^{n/3}$ при натуральных $n \geqslant 648$.

17) Докажите, что $R_n > 1$ при натуральных $n \geqslant 648$.

18) Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число.

19) Докажите, что при натуральных $n > 5$ между n и $2n$ содержится по крайней мере два простых числа.

20) Докажите, что для любого k между n и $2n$ содержится k простых чисел, если только n достаточно велико.