ЦПМ. Группа 10-2 **14.03.2019**

Серия 35. Многочлены от многих переменных

1. Существует ли многочлен $P(x,y)$ степени 962 такой, что $P(\cos t, \sin t) = 962$ для всех $t \in \mathbb{R}$?

2. Дан многочлен $P(x,y) = x^n y^n + 1 (n \in \mathbb{N})$. Докажите, что не существует многочленов $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $Q(y) \in \mathbb{Z}[y]$ таких, что $P(x,y) = R(x)Q(y)$

3. Многчлен $P(x,y)$ удовлетворяет условиям $P(4,3) = P(2,4) = P(4,4) = P(1,2) = P(1,3) - 3$. Верно ли, что существуют многочлены $R, Q \in \mathbb{Z}[X]$ такие, что $P(X,Y) = R(X) + Q(Y)$?

4. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен в $Z[X]$. Верно ли, что $f(xy)$ неприводим в $Z[X,Y]$.

5. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует многочлен $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ такой, что при условии $a+b+c=0$ имеет место

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = abc\left(P(a,b) + P(b,c) + P(c,a)\right).$$

6. $P(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(-1) = P(1)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x,y)$ с действительными коэффициентами такой, что $P(t) \equiv Q(t^2-1, t(t^2-1))$.

7. Найдите все многочлены $p(x,y)$ с действительными коэффициентами такие, что $p(x+y, x-y) = 2p(x,y)$

8. $P(x,y)$ — многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x+2y, x+y) = P(x,y)$. Докажите, что существует такой многочлен $Q(t)$, что $P(x,y) = Q((x^2-2y^2)^2)$.

ЦПМ. Группа 10-2 **14.03.2019**

Серия 35. Многочлены от многих переменных

1. Существует ли многочлен $P(x,y)$ степени 962 такой, что $P(\cos t, \sin t) = 962$ для всех $t \in \mathbb{R}$?

2. Дан многочлен $P(x,y) = x^n y^n + 1 (n \in \mathbb{N})$. Докажите, что не существует многочленов $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $Q(y) \in \mathbb{Z}[y]$ таких, что $P(x,y) = R(x)Q(y)$

3. Многчлен $P(x,y)$ удовлетворяет условиям $P(4,3) = P(2,4) = P(4,4) = P(1,2) = P(1,3) - 3$. Верно ли, что существуют многочлены $R, Q \in \mathbb{Z}[X]$ такие, что $P(X,Y) = R(X) + Q(Y)$?

4. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен в $Z[X]$. Верно ли, что $f(xy)$ неприводим в $Z[X,Y]$.

5. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует многочлен $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ такой, что при условии $a+b+c=0$ имеет место

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1} = abc\left(P(a,b) + P(b,c) + P(c,a)\right).$$

6. $P(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(-1) = P(1)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x,y)$ с действительными коэффициентами такой, что $P(t) \equiv Q(t^2-1, t(t^2-1))$.

7. Найдите все многочлены $p(x,y)$ с действительными коэффициентами такие, что $p(x+y, x-y) = 2p(x,y)$

8. $P(x,y)$ — многочлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x+2y, x+y) = P(x,y)$. Докажите, что существует такой многочлен $Q(t)$, что $P(x,y) = Q((x^2-2y^2)^2)$.