ЦПМ. Группа 10-2 **28.02.2019**

Серия 32. Инверсная добавка

ИНВЕРСИЯ — нарушение принятого в разговорной речи порядка слов и, тем самым, обычной интонации

Литературная энциклопедия

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями (в этой задаче прямые мы тоже будем считать окружностями).

2 (неравенство Птолемея). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ докажите неравенство

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Когда достигается равенство? *Сделайте инверсию с центром в точке A. Или B.*

3 (лемма Архимеда). В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω касается Ω в точке P и AB в точке Q; M — середина дуги AB. Докажите, что P, Q и M лежат на одной прямой.

4 (продолжение). В обозначениях предыдущей задачи докажите, что касательная из точки M к ω равна MA.

5. На окружности расположены точки A, B, C, D. Обозначим через K середину дуги AB, не содержащую точек C и D. Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N. Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности

6 (поризм Штейнера). Рассмотрим цепочку окружностей ω_1, ω_2, …, ω_n, каждая из которых касается двух соседних (ω_n касается ω_{n+1} и ω_{n-1}) и двух данных непересекающихся окружностей Ω_1 и Ω_2. Тогда для любой окружности θ_1, касающейся Ω_1 и Ω_2 (одинаковым образом) существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей θ_1, θ_2, …, θ_n.

ЦПМ. Группа 10-2 **28.02.2019**

Серия 32. Инверсная добавка

ИНВЕРСИЯ — нарушение принятого в разговорной речи порядка слов и, тем самым, обычной интонации

Литературная энциклопедия

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями (в этой задаче прямые мы тоже будем считать окружностями).

2 (неравенство Птолемея). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ докажите неравенство

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Когда достигается равенство? *Сделайте инверсию с центром в точке A. Или B.*

3 (лемма Архимеда). В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω касается Ω в точке P и AB в точке Q; M — середина дуги AB. Докажите, что P, Q и M лежат на одной прямой.

4 (продолжение). В обозначениях предыдущей задачи докажите, что касательная из точки M к ω равна MA.

5. На окружности расположены точки A, B, C, D. Обозначим через K середину дуги AB, не содержащую точек C и D. Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N. Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности

6 (поризм Штейнера). Рассмотрим цепочку окружностей ω_1, ω_2, …, ω_n, каждая из которых касается двух соседних (ω_n касается ω_{n+1} и ω_{n-1}) и двух данных непересекающихся окружностей Ω_1 и Ω_2. Тогда для любой окружности θ_1, касающейся Ω_1 и Ω_2 (одинаковым образом) существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей θ_1, θ_2, …, θ_n.