

Серия 31. Функциональные уравнения

Мы – фурии и не хотим таиться

Гёте

1. Существуют ли всюду определенные функции $f(x)$ и $g(y)$, что для любых x и y : $f(x)g(y) = x + y - 1$?
2. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(a + x) - f(a - x) = 4ax$.
3. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.
4. Найти все определенные на множестве действительных чисел функции f , для которых при любых действительных x , y и z имеет место равенство: $f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = xy + yz + xz + x + y + z$.
5. Найдите все функции $f(x)$ такие, что выполнено $f(t^2 + t + 1) = t$ для всех $t \geq 0$.
6. Найдите все такие функции, что для любого $x > 0$ выполнено $2f(x) + f(1/x) = 3x - 3/x$.
7. Найдите все такие функции $f(x)$, что при всех x и y выполнено: $f(x)f(y) = f(x - y)$.
8. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$ при всех x , $y \in \mathbb{R}$.
9. Функция $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ называется загадочной, если $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $|g(a) - g(b)| \leq 2|a - b|$ для всех $a, b \in [0, 1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0, 1]$ выполнено неравенство $|g(a) - g(b)| \leq \beta$.
10. Найдите все функции такие, что при всех $x > 0$ выполнено равенство $f(f(x)) + f(x) = 12x$.

Серия 31. Функциональные уравнения

Мы – фурии и не хотим таиться

Гёте

1. Существуют ли всюду определенные функции $f(x)$ и $g(y)$, что для любых x и y : $f(x)g(y) = x + y - 1$?
2. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(a + x) - f(a - x) = 4ax$.
3. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.
4. Найти все определенные на множестве действительных чисел функции f , для которых при любых действительных x , y и z имеет место равенство: $f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = xy + yz + xz + x + y + z$.
5. Найдите все функции $f(x)$ такие, что выполнено $f(t^2 + t + 1) = t$ для всех $t \geq 0$.
6. Найдите все такие функции, что для любого $x > 0$ выполнено $2f(x) + f(1/x) = 3x - 3/x$.
7. Найдите все такие функции $f(x)$, что при всех x и y выполнено: $f(x)f(y) = f(x - y)$.
8. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$ при всех x , $y \in \mathbb{R}$.
9. Функция $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ называется загадочной, если $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $|g(a) - g(b)| \leq 2|a - b|$ для всех $a, b \in [0, 1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0, 1]$ выполнено неравенство $|g(a) - g(b)| \leq \beta$.
10. Найдите все функции такие, что при всех $x > 0$ выполнено равенство $f(f(x)) + f(x) = 12x$.