ЦПМ. Группа 10-2 **14.02.2019**

Рекурренты. Добавочка

9. Пусть $a_0 = 1$, $a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Докажите, что $2^{n+2}a_n > \pi$ для всех натуральных n.

10. Let a_1, a_2, a_3, … be a sequence of nonnegative numbers. If for all positive integers m and n, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, then prove that

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m.$$

11. Дана последовательность a_1, a_2, a_3, …, удовлетворяющая неравенству

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leqslant 1$$

для всех k, m. Докажите, что для всех k и m верно

$$\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

12. Пусть a_1, a_2, a_3, … — последовательность неотрицательных чисел такая, что

$$a_k - a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant 1$$

для всех натуральных k. Докажите, что

$$0 \leqslant a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}$$

для всех натуральных k.

ЦПМ. Группа 10-2 **14.02.2019**

Рекурренты. Добавочка

9. Пусть $a_0 = 1$, $a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Докажите, что $2^{n+2}a_n > \pi$ для всех натуральных n.

10. Let a_1, a_2, a_3, … be a sequence of nonnegative numbers. If for all positive integers m and n, $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, then prove that

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m.$$

11. Дана последовательность a_1, a_2, a_3, …, удовлетворяющая неравенству

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leqslant 1$$

для всех k, m. Докажите, что для всех k и m верно

$$\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

12. Пусть a_1, a_2, a_3, … — последовательность неотрицательных чисел такая, что

$$a_k - a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant 1$$

для всех натуральных k. Докажите, что

$$0 \leqslant a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}$$

для всех натуральных k.