ЦПМ. Группа 10-2 **24.01.2019**

Серия 26. Немного уравнений

1. Пусть x — корень уравнения $x^3+2x^2+10x=20$. Докажите, что x^2 — иррациональное число.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ и геометрическая прогрессия q_1, q_2, q_3, q_4, все члены которой различны. Может ли оказаться так, что $f(q_1)=q_2$, $f(q_2)=q_3$, $f(q_3)=q_4$?

3. Многочлен третьей степени с целыми коэффициентами имеет три положительных иррациональных корня. Докажите, что они не могут образовывать геометрическую прогрессию.

4. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвёртой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x))=0$ не имеет решений?

5. Числа a и a^3-6a — различные корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. При этом число a иррационально. Чему может быть равно a?

6. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x^3-ax^2+b^3=0, \\ x^3-bx^2+c^3=0, \\ x^3-cx^2+a^3=0. \end{cases}$ не имеет вещественных решений, если числа a, b, c различны.

7. Вещественные числа a, b, c таковы, что среди трёх уравнений

$$x^3-ax^2+b=0, \qquad x^3-bx^2+c=0, \qquad x^3-cx^2+a=0$$

любые два имеют общий корень. Докажите, что $a=b=c$.

8. Найдите все такие целые числа b, для которых уравнение $[x^2]-2012x+b=0$ имеет нечётное число корней.

9. Для многочлена $p(x,y)$ с вещественными коэффициентами нашлась такая функция $f(x)$, что

$$p(x,y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$$

для всех вещественных x, y. Докажите, что в качестве f можно взять некоторый многочлен.