Серия 25. Комбинаторика к региону

1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения любых двух из оставшихся, либо три числа произведение которых больше произведения любых четырёх из оставшихся.

2. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, **полным**, если для любых действительных a и b (не обязательно различных, и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

3. У Кости было два набора по 17 монет: в одном наборе все монеты настоящие, а в другом наборе ровно 5 фальшивых (все монеты выглядят одинаково; все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). Один из наборов Костя отдал другу, а впоследствии забыл, какой именно из двух наборов у него остался. Может ли Костя при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, какой именно из двух наборов он отдал?

4. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку(по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся (по своему выбору) — a_2 камней, $\ldots$, наконец в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того ,чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя - за меньшее ненулевое число ходов?

5. На окружности отмечено $2N$ точек (N – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

6. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном поярдке, причем хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой черный и белый цвета поменялись местами?

7. Можно ли множество натуралньых чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3 \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$?

8. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

=