# Серия 24. Теория чисел

1. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

2. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$ , где $1 \leqslant k, l \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, … , 99)?

3. Дано $n$ попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$ . Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

4. Найдите все тройки простых чисел $p, q, r$ такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных

5. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

6. У Игоря есть 55 карточек: на одной написана цифра 1, на двух — цифра 2, … , на девяти — цифра 9, на десяти — цифра 0. Можно ли из карточек выложить два числа: одно — 25-значное, другое — 30-значное, чтобы десятичная запись их произведения состояла из одних единиц?

7. По кругу стоят $10^{1000}$ натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовывать $10^{1000}$ последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

9. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших $n$, взаимно проста с $n$.