Подготовка к региону. Новые идеи.

1. Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре чёрных точки так, чтобы для каждой тройки точек одного цвета нашлась такая точка другого цвета, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?

2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABX и CDX. Докажите, что $4O_1O_2 \geqslant AB + CD$.

3. Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли в некотором прямоугольном параллелепипеде поместиться больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

4.Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ раскладывается в произведение двух сомножителей, в каждом из которых больше 1000 знаков.

5. Есть неизвестное Пете двузначное число n. За один вопрос Петя может для любого натурального числа k узнать сумму цифр числа kn. За какое наименьшее количество вопросов он сможет наверняка угадать n?

6. На плоскости даны $3n - 1$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.

7. У графа с n вершинами существует единственная с точностью до переименования цветов правильная раскраска в 3 цвета. Докажите, что в нём хотя бы $2n - 3$ ребра.

Кружок в “Хамовниках”. 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.

Подготовка к региону. Новые идеи.

1. Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре чёрных точки так, чтобы для каждой тройки точек одного цвета нашлась такая точка другого цвета, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?

2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABX и CDX. Докажите, что $4O_1O_2 \geqslant AB + CD$.

3. Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли в некотором прямоугольном параллелепипеде поместиться больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

4.Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ раскладывается в произведение двух сомножителей, в каждом из которых больше 1000 знаков.

5. Есть неизвестное Пете двузначное число n. За один вопрос Петя может для любого натурального числа k узнать сумму цифр числа kn. За какое наименьшее количество вопросов он сможет наверняка угадать n?

6. На плоскости даны $3n - 1$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.

7. У графа с n вершинами существует единственная с точностью до переименования цветов правильная раскраска в 3 цвета. Докажите, что в нём хотя бы $2n - 3$ ребра.

Подготовка к региону. Комбинаторика.

1. В компании из n человек каждый знает хотя бы одного, но не всех. Докажите, что можно рассадить четверых из них за круглый стол так, чтобы каждый из сидящих знал ровно одного из своих соседей.

2. Имеется 100 человек, каждый из которых говорит ровно на одном языке. Назовём группу из нескольких людей «радующей слух», если в ней люди суммарно говорят хотя бы на трёх языках. Известно, что, как ни дели этих 100 человек на 25 групп по 4 человека, хотя бы одна из групп будет радовать слух. Каким наименьшим количеством различных языков могут владеть эти 100 человек?

3. 100 одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов так, что весы не в равновесии. Известно, что есть монеты ровно двух весов, причем монет каждого веса – четное число. За одну операцию разрешается поменять местами любые две монеты. За какое наименьшее число операций можно наверняка добиться равновесия?

4. Пятьдесят единиц и пятьдесят чисел -1 расставлены по кругу так, что одинаковые числа не стоят рядом. Каждую минуту Вася стирает какое-нибудь из этих чисел и записывает в тетрадку сумму этого числа и двух соседних. Докажите, что через 98 минут произведение чисел, записанных в тетрадку, будет положительным.

5. У Васи есть 100 банковских карточек. Вася знает, что на одной из карточек лежит 1 рубль, на другой – 2 рубля, и так далее, на последней – 100 рублей, но не знает, на какой из карточек сколько денег. Вася может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдает требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдает ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку съедает в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму Вася может гарантированно получить?

6. Есть полный граф на 2015 вершинах. Два игрока по очереди красят рёбра графа: первый игрок своим ходом красит одно ребро в красный, а второй – 10 рёбер в синий. Красить одно ребро два раза нельзя. Может ли первый гарантированно получить красный цикл, проходящий ровно по 11 различным вершинам по одному разу по каждой из них?

Подготовка к региону. Геометрия.

1. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P – середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: AC перпендикулярно BD, $\angle BCA = 10°$, $\angle BDA = 20°$, $\angle BAC = 40°$. Найдите $\angle BDC$.

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

6. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

Кружок в “Хамовниках”. 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.

Подготовка к региону. Геометрия.

1. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P – середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: AC перпендикулярно BD, $\angle BCA = 10°$, $\angle BDA = 20°$, $\angle BAC = 40°$. Найдите $\angle BDC$.

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

6. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

Подготовка к региону. Разное попроще.

1. На доске записаны два числа: 1 и 2. Двое играющих ходят по очереди. За один ход можно увеличить одно из чисел на его сумму цифр или на сумму цифр другого числа. Выигрывает тот, кто первым напишет число, большее 2019. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

2. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

3. Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d

4. Какое наименьшее число королей можно расставить на белых полях шахматной доски 10×10 таким образом, чтобы они побили все свободные поля?

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = 2CD$. Прямая l проходит через точку C, пересекает отрезок AB и перпендикулярна CD. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает прямую l в точках P и Q. Докажите, что $AP \perp BQ$.

6. На одной из клеток доски $n \cdot n$, строки и столбцы которой занумерованы числами от 1 до n, стоит фишка. Если фишка стоит в k-й строке, её можно переместить в любую клетку k-го столбца. Докажите, что можно так перемещать фишку, чтобы она побывала во всех клетках доски ровно по одному разу и вернулась в исходную клетку.

7. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

8. Выпуклый N-угольник назовем красивым, если при любом его разбиении непересекающимися диагоналями на треугольники среди этих треугольников найдется пара равных. Докажите, что при четном N есть бесконечно много попарно не подобных красивых N-угольников.

9. Пусть a и b — действительные числа, связанные соотношением $2ab = a - b$. Для всех натуральных k обозначим за x_k и y_k ближайшие натуральные числа к ak и bk соответственно (если ближайших числа два, то выбирается наибольшее). Докажите, что натуральное число n встречается в последовательности x_k тогда и только тогда, когда оно встречается в последовательности y_k хотя бы 3 раза.

Подготовка к региону. Разное.

1. Найдите все такие тройки вещественных чисел a, b, c, что каждое из уравнений $x^3+(a+1)x^2+(b+3)x+(c+2)=0$,

$x^3+(a+2)x^2+(b+1)x+(c+3)=0$,

$x^3+(a+3)x^2+(b+2)x+(c+1)=0$

имеет три различных корня, но среди корней всех трех уравнений есть всего пять различных чисел.

2. Пусть заданы натуральные числа $k \leqslant n$. Какое наибольшее количество k — элементных подмножеств можно выбрать из множества чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, что для любых двух выбранных подмножеств верно, что одно из них состоит из k наименьших элементов их объединения.

3. Дано натуральное число n, не кратное 3. Докажите, что существует такое натуральное число m, что каждое натуральное число, не меньшее m, является суммой цифр некоторого кратного n.

4.Клетки доски $4n \times 4n$ окрашены в шахматном порядке. На некоторых белых клетках стоят короли, причём все свободные клетки доски оказались под боем. Докажите, что на доске не меньше, чем $2n^2+n$ королей.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, для которого $AB : AD = CD : CB$. Прямая AD пересекает BC в точке X, а прямая AB пересекает прямую CD в точке Y. Точки E, F, G и H — середины AB, BC, CD и DA соответственно. Биссектриса угла AXB пересекает отрезок EG в точке S, а биссектриса угла AYD пересекает отрезок FH в точке T. Докажите, что прямые ST и BD параллельны.

6. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.