

Серия 22. Полуинвариант

Второй закон термодинамики гласит, что энтропия является полуинвариантом.

1. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B оттуда — в самый удаленный от него город C и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A то путешественник никогда не вернется в A .
2. В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.
3. На плоскости дано $2n$ точек общего положения. Половину из них покрасили красным, а другую половину синим. Докажите, что можно разбить точки на разноцветные пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки из одной пары, не пересекались
4. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
5. Есть 10 различных чисел. За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.
 - (a) Может ли процесс продолжаться бесконечно?
 - (b) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?
6.
 - (a) В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается поменять в нем все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время во всех таких прямоугольниках плюсов будет больше чем минусов.
 - (b) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток сумма отрицательна, разрешается поменять в нем знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из таких прямоугольников сумма будет неотрицательной.
 - (c) Как в предыдущем пункте, но числа — действительные.
7. В стране дальтоники все города подняли над ратушами флаги — черно-синие либо бело-золотые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км.
 - (a) Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся
 - (b) Все такие города меняют цвета флагов. Прекратятся ли смены флагов?