ЦПМ. Группа 10-2 **10.12.2018**

Серия 20. Неравенство Йенсена

Неравенство — не препятствие
плодотворному общению

Л.С. Клейн

1. Докажите, что для углов треугольника $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. Выведите из неравенство Йенсена неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим.

3. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Гёльдера, т.е. при $k>1$ и неотрицательных x_i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)^k \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^k, \qquad q_1,\ldots,q_n>0, \quad q_1+q_2+\ldots+q_n=1.$$

4. Докажите, что для углов треугольника $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$.

5. Пусть $x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Докажите, что $\frac{x\cos x+y\cos y+z\cos z}{x+y+z} \leqslant \frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}$.

6. Докажите, что $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant (n+1)^n$, если сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1.

7. Пусть $a,b,c>0$, $abc\geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geqslant \frac{27}{8}.$$

8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

$$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \frac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}.$$

ЦПМ. Группа 10-2 **10.12.2018**

Серия 20. Неравенство Йенсена

Неравенство — не препятствие
плодотворному общению

Л.С. Клейн

1. Докажите, что для углов треугольника $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. Выведите из неравенство Йенсена неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим.

3. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Гёльдера, т.е. при $k>1$ и неотрицательных x_i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)^k \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^k, \qquad q_1,\ldots,q_n>0, \quad q_1+q_2+\ldots+q_n=1.$$

4. Докажите, что для углов треугольника $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$.

5. Пусть $x,y,z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Докажите, что $\frac{x\cos x+y\cos y+z\cos z}{x+y+z} \leqslant \frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}$.

6. Докажите, что $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant (n+1)^n$, если сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1.

7. Пусть $a,b,c>0$, $abc\geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geqslant \frac{27}{8}.$$

8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

$$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \frac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}.$$