

Ego plus quam feci, facere non possum

Алгебраический разнобой

1. Существует ли такое натуральное k , что сто последних цифр числа 2101^k совпадают с ста последними цифрами числа 2007^k ?

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых $2^n + n^2$ кратно 100.

3. Даны вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

4. Про вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ известно, что $a_1^2 \geq a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$. Докажите неравенство

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

5. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 6xyz$.

6. При каких натуральных n число $4^n + 6^n + 9^n$ является точным квадратом?

7. Найдите все пары натуральных чисел x и y , для которых $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$.

8. Найдите наименьшее натуральное a , для которого неравенство $(n!)^2 \cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n .

9. Пусть p — простое число. Определим последовательность $\{a_n\}$ как $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все возможные значения p , если известно, что один из членов последовательности равен -1 .

Ego plus quam feci, facere non possum

Алгебраический разнобой

1. Существует ли такое натуральное k , что сто последних цифр числа 2101^k совпадают с ста последними цифрами числа 2007^k ?

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых $2^n + n^2$ кратно 100.

3. Даны вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

4. Про вещественные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ известно, что $a_1^2 \geq a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$. Докажите неравенство

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

5. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 6xyz$.

6. При каких натуральных n число $4^n + 6^n + 9^n$ является точным квадратом?

7. Найдите все пары натуральных чисел x и y , для которых $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$.

8. Найдите наименьшее натуральное a , для которого неравенство $(n!)^2 \cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n .

9. Пусть p — простое число. Определим последовательность $\{a_n\}$ как $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все возможные значения p , если известно, что один из членов последовательности равен -1 .