ЦПМ. Группа 10-2 **01.10.2018**

Серия 5. Теорема и неравенство Птолемея

Aut disce, aut discede!

0. Докажите, что для любого четырехугольника $ABCD$ имеет место неравенство

$$AB \cdot CD + DA \cdot BC \geqslant AC \cdot BD,$$

причёт равенство достигается только для вписанного четырёхугольника.

1. Равнобедренный треугольник ABC ($CA = CB$) вписан в окружность с центром O; точка M лежит на дуге AB, не содержащей точку C. Докажите, что $\frac{MA+MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) имеет место равенство $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

3. Пусть φ, ψ — острые углы. Докажите, что $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi$.

4. Точка M лежит на окружности, описанной около квадрата $A_1A_2A_3A_4$. Докажите, что $MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$.

5. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ — правильный многоугольник. Пусть также M лежит на меньшей дуге A_1A_{2n+1}. Докажите, что $MA_1 + MA_3 + \ldots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \ldots + MA_{2n}$.

6. Пусть $ABCD$ — тетраэдр в трёхмерном пространстве. Докажите, что $AB \cdot CD + DA \cdot BC > AC \cdot BD$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый. Пусть стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, диагонали $AC = m$, $BD = n$; $\varphi = \angle A + \angle C$. Докажите, что $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi$.

8. A, B, C, D — четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

9 (а теперь тригонометрия!). Докажите, что $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.

ЦПМ. Группа 10-2 **01.10.2018**

Серия 5. Теорема и неравенство Птолемея

Aut disce, aut discede!

0. Докажите, что для любого четырехугольника $ABCD$ имеет место неравенство

$$AB \cdot CD + DA \cdot BC \geqslant AC \cdot BD,$$

причёт равенство достигается только для вписанного четырёхугольника.

1. Равнобедренный треугольник ABC ($CA = CB$) вписан в окружность с центром O; точка M лежит на дуге AB, не содержащей точку C. Докажите, что $\frac{MA+MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) имеет место равенство $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

3. Пусть φ, ψ — острые углы. Докажите, что $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi$.

4. Точка M лежит на окружности, описанной около квадрата $A_1A_2A_3A_4$. Докажите, что $MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$.

5. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ — правильный многоугольник. Пусть также M лежит на меньшей дуге A_1A_{2n+1}. Докажите, что $MA_1 + MA_3 + \ldots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \ldots + MA_{2n}$.

6. Пусть $ABCD$ — тетраэдр в трёхмерном пространстве. Докажите, что $AB \cdot CD + DA \cdot BC > AC \cdot BD$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ — выпуклый. Пусть стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, диагонали $AC = m$, $BD = n$; $\varphi = \angle A + \angle C$. Докажите, что $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi$.

8. A, B, C, D — четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

9 (а теперь тригонометрия!). Докажите, что $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.