

Серия 1. Разнобой

Per aspera ad astra

1. У каждого натурального числа от $n + 1$ до $2n$ включительно взяли наибольший нечетный делитель, а потом сложили все эти делители. Что получилось в итоге (ответ зависит от n)?
2. Докажите, что многочлен $3x^{2018} + 4$ нельзя представить в виде суммы квадратов трёх многочленов с целыми коэффициентами.
3. На плоскости отмечены 2018 точек общего положения. Докажите, что из них можно выбрать три и описать вокруг них окружность, что никакие другие точки не попадут внутрь этой окружности.
4. В связном графе 10000 вершин. Есть несколько столиц. Путь между любыми столицами содержит хотя бы 200 ребер. Докажите что столиц меньше 100.
5. В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка K так, что $\angle BAC = \angle KMC = \angle KCA$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника KMC равноудален от точек A и B .
6. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$a + 2b + 3c + 4d - 5ab - 6bc - 7cd - 8da, \quad \text{если } a, b, c, d \in [0; 1].$$

7. В некоторые клетки доски 8×8 вписаны треугольники, у которых одна сторона совпадает со стороной клетки, а третья вершина лежит на противоположной стороне клетки. У треугольников нет общих точек. Каково наименьшее возможное число пустых клеток?
8. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[0; 1]$ такова, что $f(0) = f(1) = 0$ и $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in [0; 1]$.
 - а) Докажите, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [0; 1]$;
 - б) Докажите, что $f(x)$ имеет бесконечно много нулей на $[0; 1]$;
 - в) Найдите ненулевую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию задачи.

Серия 1. Разнобой

Per aspera ad astra

1. У каждого натурального числа от $n + 1$ до $2n$ включительно взяли наибольший нечетный делитель, а потом сложили все эти делители. Что получилось в итоге (ответ зависит от n)?
2. Докажите, что многочлен $3x^{2018} + 4$ нельзя представить в виде суммы квадратов трёх многочленов с целыми коэффициентами.
3. На плоскости отмечены 2018 точек общего положения. Докажите, что из них можно выбрать три и описать вокруг них окружность, что никакие другие точки не попадут внутрь этой окружности.
4. В связном графе 10000 вершин. Есть несколько столиц. Путь между любыми столицами содержит хотя бы 200 ребер. Докажите что столиц меньше 100.
5. В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка K так, что $\angle BAC = \angle KMC = \angle KCA$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника KMC равноудален от точек A и B .
6. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$a + 2b + 3c + 4d - 5ab - 6bc - 7cd - 8da, \quad \text{если } a, b, c, d \in [0; 1].$$

7. В некоторые клетки доски 8×8 вписаны треугольники, у которых одна сторона совпадает со стороной клетки, а третья вершина лежит на противоположной стороне клетки. У треугольников нет общих точек. Каково наименьшее возможное число пустых клеток?
8. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[0; 1]$ такова, что $f(0) = f(1) = 0$ и $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in [0; 1]$.
 - а) Докажите, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [0; 1]$;
 - б) Докажите, что $f(x)$ имеет бесконечно много нулей на $[0; 1]$;
 - в) Найдите ненулевую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию задачи.