Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-2.

Серия 10. Разнобой.

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667
2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах
4. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному
5. Пусть $\sigma(n)$ - сумма делителей числа n. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$.
6. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в этих точках не превосходит $\frac{n^2-3n}{4}$

Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-2.

Серия 10. Разнобой.

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667
2. По окружности расставлено 100 попарно различных чисел. Докажите, что можно выбрать 4 подряд стоящих числа таким образом, чтобы сумма двух крайних чисел этой четверки была строго больше суммы средних.
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах
4. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному
5. Пусть $\sigma(n)$ - сумма делителей числа n. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$.
6. На плоскости даны $n \geqslant 4$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в этих точках не превосходит $\frac{n^2-3n}{4}$