Серия 23. Таблицы

Грамотный? На кол тебя!
Стишки пишешь? На кол!
Таблицы знаешь? На кол,
слишком много знаешь!

Братья Стругацкие. Трудно быть богом.

1. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

3. Дана таблица $n \times n$, в каждой клетке записано число, причем все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа

4. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

5. Докажите, что если в $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звездочки будут вычеркнуты.

6. В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отлчиаются не меньше чем на $n + 1$.

7. В таблице $n \times n$ закрашены некоторые клетки. Причем в каждой строке и каждом столбце отмечено k клеток. Докажите, что в следующие $n - k$ дней мы можем каждый день закрашивать некоторое количество клеток так, чтобы в каждой строке и столбце было по 1 свежезакрашенной клетке.

8. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

9. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leqslant 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?