Серия 9. Графы. Паросочетания-2.

1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ и $B_1, B_2, ..., B_n$ суть разбиения множества $\{1, 2, ...kn\}$ на n k-элементных. Докажите, что существует множество T такое, что его пересечение с любым из множеств A_i или B_i состоит ровно из одного элемента.

2. В лотерее есть n различных шаров, которые выпадают по очереди. Лотерейный билет считается выигравшим, если в нем хотя бы один из шаров записан на том же месте, что и в выпавшей последовательности. Какое наименьшее число билетов нужно купить, чтобы точно выиграть?

3. В классе некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками (дружба взаимна). Назовём множество мальчиков *хорошим*, если можно пересадить всех учеников в классе так, чтобы мальчики из этого множества сидели с девочками, с которыми дружат. Аналогично определяется *хорошее* множество девочек. Известно, что множество всех мальчиков не является хорошим. Докажите, что можно какого-то мальчика перевести в другой класс так, что всякое хорошее множество девочек останется хорошим.

4. Клетки таблицы $3n \times 3n$ покрашены диагональной раскраской в зелёный, красный и синий цвет. В клетках таблицы расставлены по $3n^2$ фишек зелёного, красного и синего цвета. Известно, что для некоторого d можно так переставить фишки, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на d и каждая зелёная фишка оказалась там, где раньше была красная, каждая красная оказалась там, где раньше была синяя, а каждая синяя оказалась там, где раньше была зелёная. Докажите, что можно переставить фишки так, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на $d+2$ и каждая фишка оказалась в клетке того же цвета.

5. а) Назовём паросочетание совершенным, если оно разбивает на пары все вершины. Пусть в графе G есть совершенное паросочетание, содержащее ребро ab, но не содержащее ребро cd, и совершенное паросочетание, содержащее ребро cd, но не содержащее ребро ab. Пусть также известно, что a соединена с вершинами c и d. Докажите, что в графе существует совершенное паросочетание, не содержащее рёбер ab и cd.

б) В Графе G нельзя выделить совершенное паросочетание, но это свойство нарушается при добавлении любого ребра. Докажите, что если удалить из него все вершины степени $|G| - 1$, то граф распадётся на компоненты связности, каждая из которых является полным графом.

в) **(W. T. Tutte, 1947.)** Обозначим как $o(G)$ количество компонент связности в графе G с нечётным количеством вершин, а как $V(G)$ – множество вершин. Докажите, что в графе G можно выделить совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leqslant |S|$.

г) **(C. Berge, 1958.)** Пусть $\alpha(G)$ – размер максимального паросочетания. Назовём дефицитом графа G величину $def(G) = |G| - 2\alpha(G)$. Докажите, что $def(G) = \max\limits_{S \subset V(G)} o(G - S) - |S|$.

---

6. Окружность ω проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AC и AB в точках D и E соответственно. На луче BD отметили точку K так, что $|BK| = |AC|$. На луче CE отметили точку L так, что $|CL| = |AB|$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на окружости ω.

7. Вася выписал в ряд 10 неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. После чего Петя должен стереть несколько из них (возможно ни одного, но не все), перед несколькими из остальных поставить знак "плюс", перед оставшимися —- знак "минус" и посчитать модуль получившегося выражения. Петя хочет получить как можно меньшее значение. Какого наименьшего значения он может добиться вне зависимости от действий Васи?

8. Пусть $\sigma(n)$ – сумма делителей числа n. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$$