Серия 8. Графы. Паросочетания.

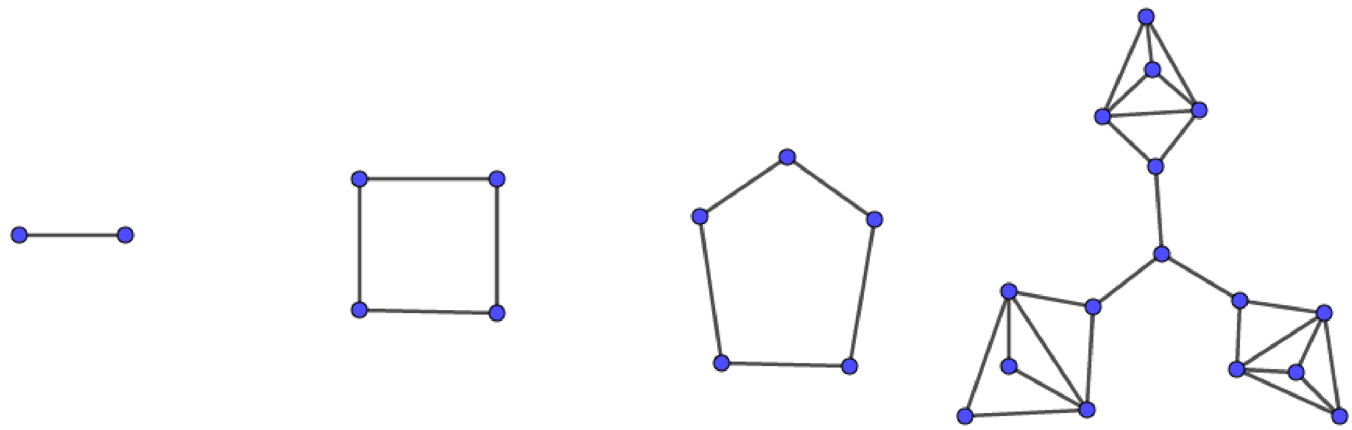
1. а**) Сформулируйте лемму Холла.
б***) Докажите лемму Холла.

2. Пусть M – множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, ..., 2k+1\}$.Существует ли биекция $f : M \to M$ такая, что $A \cap f(A) = \emptyset$?

3. (T. Gallai, 1959) Пусть G – двудольный граф, в котором нет вершин нулевой степени. Пусть U – максимальное паросочетание, а V – такое минимальное подмножество рёбер, что любая вершина является концом одного из них. Докажите, что $|U| + |V| = |V(G)|$.

4. (D. Konig, 1931.) Пусть G – двудольный граф, в котором нет вершин нулевой степени. Пусть U – максимальное паросочетание, а V – такое минимальное подмножество вершин, что любое ребро имеет конец в одной из них. Докажите, что $|U| = |V|$.

5. Королевский парк представляет собой граф G. В его вершинах король расставил мудрецов и каждому из них надел на голову чёрный или белый колпак. Мудрецы видят только цвета колпаков на мудрецах из соседних вершин. После этого все мудрецы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Для какого максимального числа k существует стратегия, позволяющая гарантировано угадать цвет своего колпака хотя бы k мудрецам, если G имеет вид



6. а) Докажите, что в случае произвольного двудольного графа максимальное гарантированное число угадавших мудрецов равно размеру максимального паросочетания в графе.
б*) Докажите это для произвольного графа.

7. Рассмотрим таблицу 100×100. Множество из 100 клеток называется *паросочетанием* если все клетки находятся в разных строках и разных столбцах.
а) Для какого наименьшего R можно покрасить R клеток доски в красный цвет так, чтобы в любом паросочетании нашлось минимум две красных клетки?
б)Для каких пар натуральных чисел $(G; I)$ можно так покрасить G клеток в голубой цвет, и I клеток в изумрудный цвет, чтобы в каждом паросочетании нашлось бы либо две голубых клетки, либо две изумрудных?

---

8. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

9. Triangle BCF has a right angle at B. Let A be the point on line CF such that $FA = FB$ and F lies between A and C. Point D is chosen so that $DA = DC$ and AC is the bisector of $\angle DAB$. Point E is chosen so that $EA = ED$ and AD is the bisector of $\angle EAC$. Let M be the midpoint of CF. Let X be the point such that $AMXE$ is a parallelogram. Prove that BD, FX and ME are concurrent.

10. . Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2+b^2+6}{ab}$ — целое. Чему оно может быть равно?