Серия 7. Разнобой.

Мы все такие разные, и всё-таки мы вместе

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2019^2$. Обязательно ли число abc является точным квадратом?
2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что PQ перпендикулярно AC. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.
3. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3+y^3+z^3+t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.
4. Сумма цифр числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3?
5. Пусть $x, y, z \in [0, 1]$. Докажите, что $3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3$
6. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.

Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-2.

Серия 7. Разнобой.

Мы все такие разные, и всё-таки мы вместе

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2019^2$. Обязательно ли число abc является точным квадратом?
2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что PQ перпендикулярно AC. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.
3. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3+y^3+z^3+t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.
4. Сумма цифр числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3?
5. Пусть $x, y, z \in [0, 1]$. Докажите, что $3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3$
6. В неравнобедренном треугольнике две медианы равны двум высотам. Найдите отношение третьей медианы к третьей высоте.