

Серия 6. Другая интерпретация.

1. Может ли окружность пересечь одну из веток гиперболы более чем в двух точках?
2. Неотрицательные x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

3. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ac + a^2}.$$

4. Для углов α, β, γ выполнено неравенство $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}$.
 5. На доске написаны числа $0, 1, \sqrt{2}$. Если написаны числа a, b, c , то можно заменить a на $a + r(b - c)$, где r — рациональное число. Можно ли за несколько ходов получить тройку $(1, \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$?
 6. Для каждой грани многогранника провели вектор, перпендикулярный ей, смотрящий вовне, длина которого численно равна площади этой грани. Докажите, что сумма указанных векторов равна нулю.
-

7. В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или паромом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

8. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca).$$

- а) Докажите, что каждое из чисел a, b, c — точный квадрат.
- б) Конечно ли множество таких троек (a, b, c) ?