Серия 4. Аддитивная комбинаторика.

Упражнение. Даны два множества натуральных чисел A и B. Рассмотрим множество $A+B$, состоящее из чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$. Докажите, что $|A+B| \geqslant |A|+|B|-1$.

1. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Докажите, что можно выбрать некоторые из них (хотя бы одно), и взять часть выбранных чисел с плюсом, а часть с минусом так, чтобы в сумме получилось число, делящееся на 100.

2. Сто одно натуральное число из диапазона от 1 до 10^6 покрасили в синий цвет. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы все возможные суммы красного и синего числа были попарно различными.

3. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа таких, что $a+b=c+d$.

4. (Теорема Коши-Дэвенпорта). Дано два множества A и B остатков по простому модулю p. Докажите, что множество $A+B$ содержит не менее, чем $\min(p, |A|+|B|-1)$ элементов.

а) Докажите теорему Коши-Дэвенпорта в случае, если $|A|+|B|-1 \geqslant p$.

б) Докажите, что множество $(A \cap B)+(A \cup B)$ является подмножеством множества $A+B$.

в) Докажите, что если все элементы множества A «сдвинуть» на какой-то остаток c, то для полученного множества A' количество элементов в сумме $A'+B$ будет таким же, как в $A+B$.

г) Докажите теорему Коши-Дэвенпорта.

5. Докажите, что для любого простого числа $p>100$ можно выбрать 5 натуральных чисел, не кратных p, сумма четвёртых степеней которых будет делиться на p.

6. Есть множество из n натуральных чисел, взаимно простых с n. Докажите, что для любого a можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была сравнима с a по модулю n.

---

7. Найдите такие пары простых чисел p и q, что $p^2 | q^3+1$, а $q^2 | p^6-1$.

8. Let five points on a circle be labelled A, B, C, D, and E in clockwise order. Assume $AE=DE$ and let P be the intersection of AC and BD. Let Q be the point on the line through A and B such that A is between B and Q and $AQ=DP$ Similarly, let R be the point on the line through C and D such that D is between C and R and $DR=AP$. Prove that PE is perpendicular to QR.

9. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers whose product is 1. Show that the sum

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

is greater than or equal to $\frac{2^n-1}{2^n}$