Серия 3. Три первых домашних задания + разнобой.

1-9. Пусть G — ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов, в котором из любой вершины до любой другой существует ориентированный путь. Для произвольной раскраски вершин графа G в два цвета назовём его вершину плохой, если все вершины, в которые из неё ведут рёбра, покрашены в тот же цвет, что и она сама. Обозначим через $k(G)$ наименьшее возможное количество плохих вершин при раскраске вершин графа G в два цвета. Какие значения может принимать $k(G)$?

1-10. A convex quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about a circle ω. Let PQ be the diameter of ω perpendicular to AC. Suppose lines BP and DQ intersect at point X, and lines BQ and DP intersect at point Y. Show that the points X and Y lie on the line AC.

1-11. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1999} + \left(\frac{b}{c}\right)^{1999} + \left(\frac{c}{d}\right)^{1999} + \left(\frac{d}{a}\right)^{1999} \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

2-4. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим. Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?

2-5. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

2-6. Докажите, что многочлен степени n нельзя представить в виде суммы n периодических функций (не обязательно непрерывных).

3-1. Числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$(a+b)\sqrt{ab} + (a+c)\sqrt{ac} + (b+c)\sqrt{bc} \geqslant (a+b+c)^2/2.$$

3-2. На дуге AE описанной окружности правильного пятиугольника $ABCDE$ выбрана точка X. Докажите, что $AX + CX + EX = BX + DX$.

3-3. In the cells of an 8×8 board, marbles are placed one by one. Initially there are no marbles on the board. A marble could be placed in a free cell neighboring (by side) with at least three cells which are still free. Find the greatest possible number of marbles that could be placed on the board according to these rules.

3-4.На доске написаны 20 различных положительных чисел. Ваня выписывает в тетрадку суммы всех подмножеств из них (кроме пустого). Какое количество различных сумм у него может получиться?

3-5. Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.

3-6. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку – не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

3-7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$.

3-8. На окружности радиуса 1 проведены хорды. Каждый диаметр пересекает не более k из них. Докажите, что суммарная длина хорд не превосходит πk.