Серия 35. Домашнее задание.

1. Действительные a и b таковы, что $a^n - b^n$ – целое при любом натуральном n. Докажите, что a и b — целые числа.

2. а) Существуют ли такие натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} и b_1, b_2, $\ldots$, b_{10} со следующим свойством: для любого непустого подмножества S множества индексов $\{1, 2, \ldots, 10\}$ сумма всех чисел b_i с индексами из S, увеличенная на 12, делится на сумму чисел a_i с индексами из S?
б) Для какого наибольшего n существуют такие a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_2, $\ldots$, b_n?

3. В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем хорошим, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел?

3. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Обозначим инцентры треугольников ABC и BHC через I и J соответственно. Прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника BB_1C со сторонами BB_1 и B_1C, пересекает прямую, соединяющую точки касания вписанной окружности треугольника BC_1C со сторонами BC_1 и C_1C, в точке P. Докажите, что точки I, J, P коллинеарны.