Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.

Серия 34. Счёт в комплексных - 2.

1. Пусть I – центр вписанной окружности равнобедренного треугольника $ABC(AB = AC)$. Прямая BI пересекает AC в точке D, а перпендикуляр к AC, проходящий через точку D, пересекает AI в точке E. Докажите, что точка, симметричная I относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника BDE.

2. Точка E – середина отрезка, соединяющего ортоцентр треугольника ABC и вершину A. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что точка F, симметричная точке E относительно прямой $B'C'$ лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

3. Дан остроугольный треугольник ABC, вписанный в окружность ω. Пусть t – касательная к ω. Прямые t_a, t_b, и t_c симметричны t относительно сторон BC, CA, и AB соотвественно. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми t_a, t_b, и t_c, касается окружности ω.

Домашнее задание.

4. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некоторых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

5. Конечно ли количество таких натуральных n, для которых $(n! + 1)$ делит $(2012n)!$? Здесь восклицательный знак обозначает факториал, а вопросительный знак —- вопрос.