Серия 32. Домашние задания

Добавка по счёту в комплексных.

1. (Теорема Ньютона). Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$.Точки K и L– середины диагоналей AC и BD. Докажите, что K, L, O лежат на одной прямой.

2. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности девяти точек, при этом эти три точки являются вершинами правильного треугольника.

Рубрика “Домашнее задание”.

1. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$ обладает свойством $(a_{k-1}+a_k)(a_k+ak+1) = a_{k-1} - a_{k+1}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Докажите, что $a_n < \frac{1}{n-1}$.

2. В некоторой стране есть города, соединённые дорогами, причём из каждого города выходит не более 100 дорог. Набор дорог назовём textitидеальным, если никакие две дороги не имеют общего конца. Министерство транспорта каждый день разрушает какой-то идеальный набор дорог. Докажите, что оно может разрушить все дороги в стране не более, чем за 199 дней.

3. В школе учится n учеников. Обозначим за a и b наименьшие числа, обладающие следующими свойствами:

1) Можно разделить учеников на a групп так, что в каждой группе любые два ученика являются друзьями.

2) Можно разделить учеников на b групп так, что в каждой группе никакие два ученика не являются друзьями.

Чему равно максимальное значение $a + b$? (в зависимости от n)

Старое домашнее задание.

28-8. Сумма шести действительных чисел равна нулю, а сумма квадратов равна 6. Докажите, что их произведение не больше $\frac{1}{2}$.

28-9. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, ...,$ формулой $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

29-7. Для любого натурального n докажите равенство

$$C_{2n+1}^n = 2^0 C_n^0 C_n^{[n/2]} + 2^1 C_n^1 C_{n-1}^{[(n-1)/2]} + \ldots + 2^k C_n C_{n-k}^{[(n-k)/2]} + 2^n C_n^n C_0^0.$$

29-8. В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата 2019×2019 клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре?

29-9. Неравнобедренный треугольник ABC периметра 12 вписан в окружность ω. Точки P и Q — середины её дуг ABC и ACB соответственно. Луч PQ пересекает касательную, проведенную в точке A к окружности ω в точке R. Оказалось, что середина отрезка AR лежит на прямой BC. Найдите длину отрезка BC.

30-1. В школе n учеников и m кружков. На любой кружок ходит хотя бы два человека. Если у каких-то двух кружков есть два общих посетителя, то у них разное число участников. Докажите, что всего кружков не более $(n-1)^2$.

30-2. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

30-3. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?