Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.

Серия 31. Легендарный счёт в комплексных.

Будем обозначать единичную окружность как Ω.

1. Проверьте следующие формулы: (и не забудьте их до второго листка!)
1) Уравнение прямой AB имеет вид $(\overline{b}-\overline{a})z+(a-b)\overline{z}=a\overline{b}-b\overline{a}$.
2) Уравнение прямой, проходящей через точку C перпендикулярно AB имеет вид $(\overline{a}-\overline{b})z+(a-b)\overline{z}=(\overline{a}-\overline{b})c+(a-b)\overline{c}$.
3) Пусть $A,B\in\Omega$. Тогда уравнение прямой AB имеет вид $z+ab\overline{z}=a+b$.
4) Пусть $A,B\in\Omega$. Тогда уравнение перпендикуляра к прямой AB, проходящего через точку C, имеет вид $z-ab\overline{z}=c-ab\overline{c}$.
5) Пусть $A,B\in\Omega$. Тогда касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.
6). Пусть $A,B\in\Omega$. Если M — основание перпендикуляра из точки C на прямую AB, то $m=\frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c})$.
7) Пусть $A,B\in\Omega$. Если M симметрична точке C относительно прямой AB, то $m=a+b-ab\overline{c}$.
8) Пусть $A\in\Omega$, M — произвольная точка. Тогда прямая AM повторно пересекает Ω в точке $\frac{m-a}{1-a\overline{m}}$.

2. Прямая t касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. K — проекция ортоцентра ABC на t, L — середина AC. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

3. Пусть O — центр описанной оркужности треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку O, пересекает AB и AC в точках M и N, соответственно. Пусть S и R — середины отрезков BN и CM, соответственно. Докажите, что $\angle ROS=\angle BAC$.

4. Пусть четырёхугольник $ABCD$ — вписанный и пусть E и F — основания перпендикуляров из точки пересечения диагоналей AC и BD на стороны AB и CD, соответственно. Докажите, что EF перпендикулярна прямой, проходящей через середины сторон AD и BC.

5. Предположим, что вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R.

a) Проверьте, что тогда центр описанной окружности ABC имеет координату $\dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(p+r)(q+r)}$. (это важная формула, не забудьте её!)

a') Проверьте, что центр окружность эйлера имеет координату $\dfrac{(pq+pr+qr)^2}{(p+q)(p+r)(q+r)}$. (и эту тоже!)

b) Проверьте, что точка $f=\dfrac{pq+pr+qr}{p+q+r}$лежит на пересечении описанных окружностей треугольников PQR и окружности Эйлера треугольника ABC. (и эту тоже!)

c) **(Теорема Фейербаха)** Докажите теорему Фейербаха для вписанной окружности.

6. На высоте, опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC, выбрана такая точка K, что $AK=r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим через A_1 точку касания вписанной окружности со стороной BC, а через F — точку Фейербаха. Докажите, что $\angle KFA_1=\frac{\pi}{2}$.