Серия 30. То, что разберём. И ещё домашнее задание.

25-5. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что если для любых трех из них найдется четвертая (тоже из данных), с которой они образуют вершины параллелограмма, то $n = 4$.

25-6. На плоскости даны $3n - 1$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.

27-4. Дан остроугольный треуголькие ABC, в котором $AB < AC$. Точки E и F – оскования высот из вершин B и C, соответственно. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает BC в точке P. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, пересекает EF в точке Q. Докажите, что PQ перпендикулярна медиане треугольника ABC, выходящей из вершины A.

27-5. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружность ω касается окружности Ω в точке T и касается отрезков AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников TAK, TBK, TAL и TCL, лежат на одной окружности.

27-6а. (Теорема Фейербаха) Докажите, что окружность девяти точек касается вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника.

27-8а. Докажите, что две непересекающиеся окружности S1 и S2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

28-3. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом 0,99 (поворачивать фигуры нельзя).

28-6. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 не превосходят 1, то площадь треугольника ABC не превосходит $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

29-3. Докажите, что число $5^y + 3$ может делиться на любую степень двойки.

29-4. а) Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.
б) Докажите, что $2^n + 1$ не делится на n^2 при $n > 3$.

29-7. Для любого натурального n докажите равенство

$$C_{2n+1}^{n} = 2^0 C_n^0 C_n^{[n/2]} + 2^1 C_n^1 C_{n-1}^{[(n-1)/2]} + \ldots + 2^k C_n C_{n-k}^{[(n-k)/2]} + 2^n C_n^n C_0^0.$$

29-8. В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата 2019×2019 клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре?

Рубрика "Домашнее задание".

1. В школе n учеников и m кружков. На любой кружок ходит хотя бы два человека. Если у каких-то двух кружков есть два общих посетителя, то у них разное число участников. Докажите, что всего кружков не более $(n-1)^2$.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

3. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?