*Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.*

# Серия 29. Насколько вы помните алгебру и теорию чисел?

**1.** Дан многочлен $f(x)$ степени 2000. У многочлена $f(x^2-1)$ ровно 3400 корней, а у многочлена $f(1-x^2)$ — ровно 2700 корней. Докажите, что расстояние между какими-то двумя корнями $f(x)$ не больше $0,002$.

**2.** Сумма неотрицательных чисел $a, b, c$ равна 1. Докажите, что $1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

**3.** Докажите, что число $5^y + 3$ может делиться на любую степень двойки.

**4.** а) Докажите, что $2^n - 1$ не делится на $n$ при $n > 1$.
б) Докажите, что $2^n + 1$ не делится на $n^2$ при $n > 3$.

**5.** Let $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2n-1}$ be real numbers whose arithmetic mean equals $A$. Prove that

$$2\sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - A)^2 \geq \sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - x_n)^2.$$

**6.** При каких $n$ число $\dfrac{5^n - 1}{6}$ является точным квадратом?

**Рубрика "Домашнее задание".**

**7.** Для любого натурального $n$ докажите равенство

$$C_{2n+1}^n = 2^0 C_n^0 C_n^{[n/2]} + 2^1 C_n^1 C_{n-1}^{[(n-1)/2]} + \ldots + 2^k C_n C_{n-k}^{[(n-k)/2]} + 2^n C_n^n C_0^0.$$

**8.** В начале игры у Малыша и Карлсона есть один кусок шоколадки в виде квадрата $2019 \times 2019$ клеточек. Каждым ходом Малыш делит какой-нибудь кусок по клеточкам на три прямоугольных куска, а Карлсон съедает один из этих трех кусков по своему выбору. Игра заканчивается, когда сделать очередной ход невозможно. Если всего было сделано четное число ходов — побеждает Малыш, если нечетное — Карлсон. Кто выигрывает при правильной игре?

**9.** Неравнобедренный треугольник $ABC$ периметра 12 вписан в окружность $\omega$. Точки $P$ и $Q$ — середины её дуг $ABC$ и $ACB$ соответственно. Луч $PQ$ пересекает касательную, проведенную в точке $A$ к окружности $\omega$ в точке $R$. Оказалось, что середина отрезка $AR$ лежит на прямой $BC$. Найдите длину отрезка $BC$.