Кружок в "Хамовниках". 2018-2019 учебный год. 10 класс. Группа 10-1.

Серия 28. Принцип крайнего в комбинаторной геометрии

1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Докажите, что для любой точки O внутри выпуклого многоугольника найдется сторона l такая, что проекция O на прямую, содержащую l, лежит на l.

3. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом 0,99 (поворачивать фигуры нельзя).

4. Кубическая коробка заполнена кубами без пустых мест. Докажите, что не все кубы разные.

5. Множество, состоящее из конечного числа точек плоскости, обладает следующим свойством: для любых двух его точек A и B существует такая точка этого множества, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

6. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 не превосходят 1, то площадь треугольника ABC не превосходит $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Доказать, что найдется отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух.

Рубрика "Домашнее задание".

8. Сумма шести действительных чисел равна нулю, а сумма квадратов равна 6. Докажите, что их произведение не больше $\frac{1}{2}$.

9. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, ...$, формулой $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.